Е. Четыркин

МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ И КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Е. Четыркин Методы финансовых и коммерческих расчетов

ББК 65.053
Ч 54

Выпуск издания осуществлен с участием
Международной Академии менеджмента (г. Уфа)

Четыркин Е. М.
Ч 54 Методы финансовых и коммерческих расчетов. — М.: «Дело», «BusinessРечь», 1992. — 320 с.

ISBN 5-85900-044-8

Книга содержит систематизированное изложение методов количественного анализа, необходимого для осуществления широкого спектра разнообразных расчетов, с которыми сталкиваются банкиры, финансисты-аналитики, бухгалтеры и экономисты в банках, финансовых отделах производственных и коммерческих организаций, в инвестиционных подразделениях страховых учреждений и пенсионных фондов и т. п. В первых двух разделах рассматриваются методы начисления процентов и дисконтирования разовых выплат и потоков платежей в различных условиях, которые могут предусматривать контракты. Третий раздел охватывает методы, применяемые при разработке планов погашения задолженности, оценке ценных бумаг, анализе портфеля векселей, сравнении коммерческих контрактов и инвестиционных проектов.

Каждый из методов расчета иллюстрируется примерами.

Книга предназначена коммерческим и финансовым специалистам различного уровня — от менеджеров, принимающих стратегические решения и оценивающих их последствия, до рядовых сотрудников.

$Ч\frac{0605010204-044}{989(02)-92}$ Без объявл. ББК 65.053

ISBN 5-85900-044-8

Е. Четыркин

МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ И КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Москва
"Business Речь"
"Дело"
1992

ПРЕДИСЛОВИЕ

Любая кредитная финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность согласованных ее участниками условий, а именно: сумму кредита (займа, инвестиций), цену товара, сроки, способы начисления процентов и погашения основного долга и т. д. Множественность влияющих в каждом случае факторов приводит к тому, что их совместный результат часто неочевиден (кроме, разумеется, простейших ситуаций). Необходим количественный анализ, часто выходящий за рамки элементарных расчетов. Совокупность методов расчетов, объединяемых под общим названием финансовые и коммерческие расчеты, финансовая математика, высшие финансовые вычисления и является предметом этой книги.

Количественный финансовый анализ — одно из самых динамичных направлений экономической науки — сформировался на стыке финансовой науки и математики. Он нацелен на решение широкого круга задач — от элементарного начисления процентов и до сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих проблем в различных их постановках, зависящих от конкретных условий. К ним, в частности, можно отнести:

измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих в ней сторон;

выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции или сделки, измерение взаимосвязи этих параметров, определение их допустимых граничных значений;

разработку планов, в том числе оптимальных, выполнения финансовых операций;

нахождение параметров эквивалентного (безубыточного) изменения условий сделки.

Настоящая книга содержит систематизированное изложение основных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций. Монография состоит из трех разделов. В первом рассматриваются основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях, — процент, ставка процентов, учетная ставка, современная (приведенная) величина платежа и т. д. Соответствующие показатели обязательно присутствуют в любой финансовой операции. В разделе рассматриваются как принципы, лежащие в основе различных операций, связанных с наращением или дисконтированием платежей, так и современная практика расчетов (например, методы, применяемые центральными и коммерческими банками при начислении процентов, различные методы учета). Большое внимание уделено принципу финансовой эквивалентности платежей, который позволяет применить количественный анализ при пересмотре условий финансовых соглашений (удлинении или уменьшении срока кредита, изменении сроков платежей, консолидации обязательств и т. д.)

Второй раздел охватывает вопросы, относящиеся к количественному анализу последовательностей (потоков) платежей, в часности — финансовых рент (аннуитетов). С потоками платежей в практике встречаются всякий раз, когда по условиям соглашения платежи распределены во времени или имеется некоторый упорядоченный поток денежных поступлений. Без знания количественных соотношений между показателями, характеризующими потоки платежей, нельзя понять механизм любой долгосрочной финансовой и коммерческоцй операции. В разделе показаны методы расчетов, разработанных применительно к различным видам финансовых рент (равномерных, с изменением членов рент, с различными способами начисления процентов и т. д.). Такие расчеты дают возможность определить как обобщающие характеристики рент (наращенная сумма, современная величина), так и отдельные их пареметры.

Материал первых двух разделов имеет общий характер и может быть применен в расчетах, связанных с любыми видами финансовых операций, в том числе и при подготовке контрактов.

Назначение третьего раздела — снабдить читателя методикой финансово-экономических расчетов, выполняемых при решении конкретных проблем: разработке планов погашения долгосрочной задолженности, анализе и сравнении условий контрактов, наконец, измерении эффективности различных финансово-кредитных и коммерческих операций. Каждая из упомянутых проблем рассматривается для ряда вариантов постановки соответствующих задач.

Книга в основном содержит тадиционные методы финансово-экономических расчетов (некоторые из них у нас, к сожалению, забыты). Вместе с тем в нее включены и новые методы, появившиеся за рубежом. Заметное место в книге занимает анализ соотношений между различными финансовыми характеристиками. Хотя книга имеет главным образом практическое назначение, для лучшего раскрытия содержания формул и для того, чтобы читатель смог самостоятельно получить варианты для условий, не рассмотренных в книге, приводятся краткие доказательства.

Книга содержит большое число примеров, что позволит читателю овладеть соответствующими навыками. В ряде случаев они имеют самостоятельную познавательную ценность.

В Приложении приводятся таблицы наиболее часто встречающихся в расчетах коэффициентов. Все они представляют собой значения функций от числа лет и уровня процентной ставки.

Финансовые и коммерческие расчеты трудоемки, особенно, если требуется получить ответы для различных вариантов условий выполнения операции. Существенное сокращение затрат времени достигается при применении специализированных финансовых пакетов программ. Получившие широкое распространение в стране пакеты общего назначения (например, Framework), в которых содержатся небольшие блоки финансовых вычислений, вероятно, не могут удовлетворить потребности профессионала.

В книге внимание в основном уделяется, так сказать, технической стороне финансовых вычислений, выводу формул и показу методики их применения при определении тех или иных финансовых характеристик. Об области приложения этих методов можно получить представление по содержанию глав третьего раздела и примерам. Следует, однако, подчеркнуть, что сфера применения данных методов существенно шире, чем это может показаться, если исходить из этих конкретных примеров. Необходимость в финансовых вычислениях того типа, который рассмотрен в книге, возникает всякий раз, когда сделка включает три основных элемента — размер платежа, срок (время) и ставку процентов. Все три элемента равноправны в рамках той или иной финансовой задачи, все они требуют одинакового внимания при анализе каждой сделки, и пренебрежение любым из них может привести к нежелательным финансовым последствиям. Изменение значения любого из них неминуемо связано с изменением финансовых отношений сторон, принося выгоды одной из них и убытки другой.

Рассмотренные в книге методы расчетов, естественно, не смогли охватить все случаи, с которыми может столкнуться в своей повседневной жизни финансист. Финансовая практика многообразна и непрерывно меняется. Сделки могут предусматривать различного рода ограничения, особые обстоятельства, конкретные правила производства платежей, условия начисления процентов и т. д. Собственно, автор и не ставил перед собой задачу исчерпывающим образом охватить все возможные случаи. Цель работы более скромная — познакомить читателя с одним из направлений финансового количественного анализа, с применяемым в данной области математическим аппаратом, показать важность строгого аналитического подхода к решению соответствующих проблем, наконец, пробудить интерес к постановке и решению практических задач. Автор надеется, что методический материал, приведенный в книге, позволит читателю самостоятельно решать целый ряд нерассмотренных задач.

РАЗДЕЛ I. НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ

ГЛАВА 1. ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.1. Время как фактор в финансовых и коммерческих расчетах

В практических финансовых и коммерческих сделках и операциях суммы денег вне зависимости от их происхождения или назначения так или иначе, но обязательно, связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат. *Фактор времени*, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и выражается в виде *принципа неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени* (time-value of money). В самом деле, даже, если отвлечься от инфляции и риска, то 1000 руб., полученных через 5 лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня. Отмеченная неравноценность двух одинаковых по абсолютной величине сумм определяется прежде всего тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и т. д. Если сегодняшние деньги, в силу сказанного, ценнее будущих (в том смысле, о котором шла речь), то будущие поступления, менее ценны, чем современные. Приведем одну иллюстрацию. В периодической печати сообщалось, что американская компания «Юнион Карбайд», на химическом заводе которой в Индии произошла крупная авария, первоначально предложила в качестве компенсации выплатить пострадавшим 200 млн. долл. в течение 35 лет (индийская сторона отклонила это предложение). Для демонстрации влияния фактора времени воспользуемся этими данными и определим сумму денег, которую необходимо положить в банк, скажем, под 10% годовых, для того чтобы полностью обеспечить выплату указанных 200 млн. долл. Оказывается, что для этого достаточно единовременно выделить всего примерно 57,5 млн. долл. (методы соответствующих расчетов обсуждаются в главах 4, 5). Иначе говоря, 57,5 млн. долларов, выплаченных сегодня, равнозначны 200 млн., ежемесячно погашаемых на протяжении 35 лет.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, в финансовом и, более широко, в экономическом анализе и при решении проблем управления финансами.

Однако подобного рода суммирование допустимо там, где фактор времени не имеет значения. Например, в бухгалтерском учете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

Каждый из методов расчета, который рассмотрен в книге, обязательно учитывает в качестве одного из важнейших элементов время. Учет этого фактора осуществляется в финансовой сфере, как известно, с помощью начисления процентов.

1.2. Сущность процентов и процентных ставок

Под *процентными деньгами* или, кратко, *процентами* (interest), в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача денежной ссуды, продажа в кредит, помещение денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т. д. Какой бы вид не имели проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент. Практика выплаты процентов за выданные в долг деньги существовала задолго до нашей эры. Например, в Древней Греции взымали от 10 до 36% в год. По «Русской Правде» годовой рост с занятого капитала определялся в 40%*. В современных условиях проценты — один из важных элементов любых видов коммерческих, инвестиционных и кредитных контрактов, межстрановых экономических договоров и соглашений.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере *процентной ставки* (rate of interest) — отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют *периодом начисления*. Сумму процентных платежей определяют исходя из размера ссуды, общего ее срока, уровня процентной ставки. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно (дискретные проценты), причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев (например, в анализе долгосрочных операций)

* *Краткие сведения об истории выплат процентов в России и Европе см.: Б. Ф. Малешевский «Теория и практика пенсионных касс». Т. 1. «Теория долгосрочных финансовых операций». - Спб., 1890.*

удобно применять непрерывные проценты.

Проценты выплачиваются кредитору по мере их начисления или присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*, или *ростом* первоначальной суммы*.

В финансовом количественном анализе проценная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле — как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел или нет место непосредственный процесс передачи денежных сумм и нарастания суммы денег.

В практике, особенно зарубежной, существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов, формы осуществления операций или сделок. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды (*простые процентные ставки*) или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами (*сложные процентные ставки*).

В контрактах указываются фиксированные значения процентной ставки (постоянные или переменные). В практике, особенно во внешнеэкономических операциях, помимо фиксированных применяют и «плавающие» ставки. В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величине и надбавки к ней (маржи). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (London interbank offered rate). Размер маржи определяется целым рядом условий, в частности, финансовым положением заемщика, сроком операции и т. д. Обычно он находится в пределах 0,5 — 5%. В контракте может быть предусмотрен и переменный во времени размер маржи.

Первый раздел книги посвящен методам количественного анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету основных финансовых характеристик операций — наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины

* *Начисление процентов за предоставление кредита в настоящее время не является абсолютным правилом. В ряде исламских стран проведена так называемая «исламизация банковской деятельности», в связи с чем запрещены в явном виде начисление и выплата процентов. Вместо этого в практику введены плата за банковские услуги и выплата в виде «участия в прибылях банка».*

платежа, производимого в будущем — для разных видов процентных ставок, а также условиям и методам расчета безубыточного пересмотра условий контрактов.

1.3. Наращение по простым процентам

Формула наращения. Под *наращенной суммой* ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств и т. д.) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока. Наращенная сумма определяется умножением первоначальной суммы ссуды (principal) на *множитель наращения*, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы ссуды. Формула расчета множителя наращения зависит от вида применяемой процентной ставки и условий наращения.

Для записи формулы наращения простых процентов (simple interest) введем обозначения: I — проценты за весь срок; P — первоначальная сумма; S — сумма, образовавшаяся к концу срока ссуды (первоначальная сумма плюс начисленные за весь срок проценты); i — ставка процентов (в виде десятичной дроби).

Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов — Pni. Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, члены которой суть величины P, $P+Pi=P(1+i)$, $P(1+i)+Pi=P(1+2i)$ и т. д. Первый член этой прогрессии равен P, разность Pi, последний член (наращенная сумма) легко определяется как

$$S=P+I=P(1+ni), \qquad (1.1)$$

где $I=Pni$. Это выражение называют формулой наращения по простым процентам или кратко — *формулой простых процентов*, а множитель $(1+ni)$ — *множителем наращения простых процентов*. Процесс роста суммы долга по простым процентам легко представить графически (см. рис. 1.1)

Пример 1.1. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 7000 руб., срок долга — 4 года при ставке простого процента, равной 10% годовых.

$I=7000\cdot4\cdot0{,}1=2800$ руб.

$S=7000+2800=9800$ руб. #1

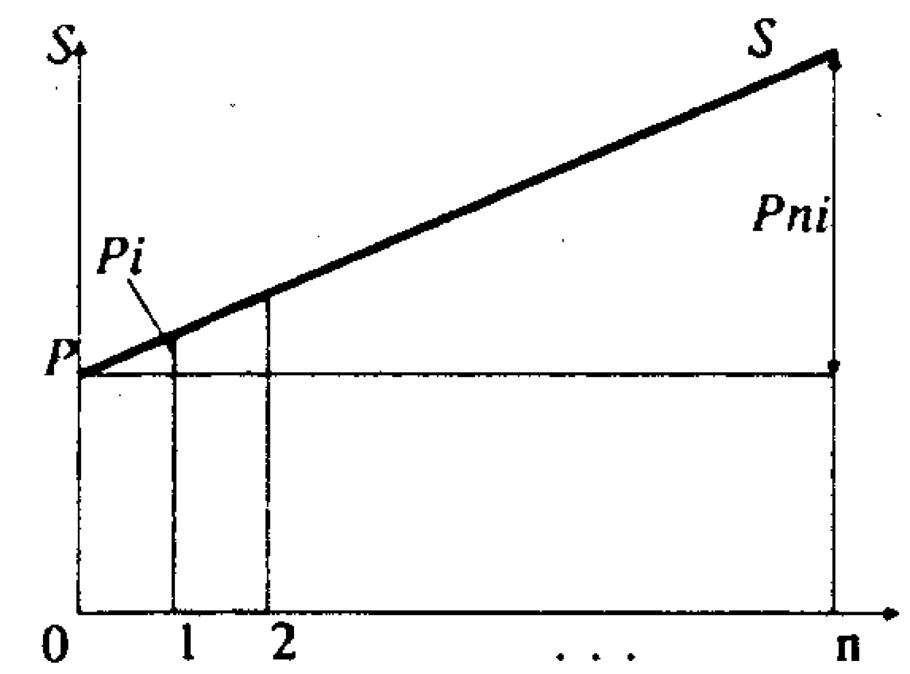

Рис 1.1

За базу при начислении процентов по ставке i, как было показано, берется первоначальная сумма долга. В практике распространен и другой подход, когда за базу (100%) принимается сумма погашения долга (maturity value). В этом случае применяется *учетная ставка* (discount rate). Обозначим ее как d. Проценты по ставке d в профессиональной банковской литературе называют *декурсивными*, а по ставке i — *антисипативными*. Отложим подробное рассмотрение ставки d до следующего параграфа, в котором среди прочих вопросов обсуждается и метод расчета наращенных сумм на основе учетной ставки.

Практика расчета краткосрочных процентов. В преобладающем числе случаев к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд, т. е. ссуд, срок которых равен году или менее его ($n\leq1$), и в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются. Поскольку ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, то при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить какая часть процента уплачивается кредитору. Аналогичная проблема возникает и при любом другом периоде начисления, когда срок начисления процентов меньше этого периода. Далее рассматривается самый распространенный случай — с годовым периодом начисления.

Величину n выразим в виде дроби: $n={}^{t}/_{K}$, где t — число дней ссуды, K — число дней в году (временная база). Здесь возможны следующие варианты расчета. Так, за базу измерения времени часто берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней). В этом случае вычисляют *обыкновенный*, или *коммерческий*, процент (ordinary interest). В отличие от него *точный* процент (exact interest) получают, когда за базу берут действительное число дней в году (365 или 366). В свою очередь определение числа дней пользования ссудой может быть *точным* и *приближенным*. В первом случае подсчитывается фактическое число дней между двумя датами, во втором — продолжительность ссуды определяется количеством месяцев и дней ссуды, месяц принимается равным 30 дням. В том и другом случае дата выдачи и дата погашения (date of maturity, due date) считается за один день. Подсчет точного числа дней между двумя датами существенно упрощается, если воспользоваться специальной таблицей, в которой показаны порядковые номера каждого дня года (см. Приложение 1) : из номера, соответствующего дню окончания ссуды, вычитают номер первого ее дня.

Итак, имеются три варианта расчета процентов:

а) *точные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот вариант дает самые точные результаты. При расчетах за полугодие срок ссуды приравнивается к 182 дням. Данный способ начисления процентов применяется многими центральными и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании.

б) *обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.* Этот метод начисления, иногда называемый банковским, распространен в операциях коммерческих банков (в частности, во Франции). Он дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Когда число дней ссуды превышает 360, данный способ измерения времени приводит к тому, что сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой; например, если $t=364$ дня, то $n=364/360=1{,}011$, и множитель наращения за этот период будет равен $1+1{,}011i$.

в) *обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.* Такой метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например, при частичном погашении ссуды. Он принят в практике банков Германии.

Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев (но не всегда) больше приближенного, то проценты с точным числом дней обычно больше, чем с приближенным. Вариант расчета с точными процентами и с приближенным измерением времени лишен смысла и не применяется.

Пример 1.2. Ссуда в размере 100 тыс. рублей выдана 20.01 до 05.10 включительно под 8% годовых, год невисокосный. Необходимо найти размер погасительного платежа. Точное число дней ссуды составит $278-20=258$ (порядковый номер 05.10 равен 278, см. Приложение 1), приближенное — 255 (восемь полных месяцев по 30 дней плюс 11 дней января и 5 дней октября минус один день). Применяя три метода определения продолжительности ссуды, получим:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды

$$S=100\,000\cdot(1+\frac{258}{365}\cdot 0{,}08)=105\,654{,}79 \text{ руб.};$$

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды

$$S=100\,000\cdot(1+\frac{258}{360}\cdot 0{,}08)=105\,733{,}33 \text{ руб.};$$

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды

$$S=100\,000\cdot(1+\frac{255}{360}\cdot 0{,}08)=105666{,}67 \text{ руб.} \qquad \#2$$

Между точными и обыкновенными процентами при одинаковой продолжительности ссуды существуют следующие соотношения:

временная база $K=365$ дней

$$\frac{I_o}{I_m}=\frac{365}{360}=1{,}013889; \qquad (1.2)$$

$$\frac{I_m}{I_o}=\frac{360}{365}=0{,}986301; \qquad (1.3)$$

$K=366$ дней

$$\frac{I_o}{I_m}=\frac{366}{360}=1{,}016667; \qquad (1.4)$$

$$\frac{I_m}{I_o}=\frac{360}{366}=0{,}983606, \qquad (1.5)$$

где I_o — обыкновенные проценты, I_m — точные проценты.

Приведенные соотношения характеризуют финансовые последствия от выбора временной базы для наращения процентов. Они могут быть использованы при определении эквивалентных процентных ставок, в данном случае — ставок, приносящих одинаковые проценты при разных временных базах:

$$i_{360}=0{,}986301\cdot i_{365}; \qquad (1.6)$$

$$i_{365}=1{,}013889\cdot i_{360}. \qquad (1.7)$$

Например, ставка в 10 % годовых при начислении процентов при временной базе $K=360$ (обыкновенные проценты) дает тот же результат, что и ставка $i_{365}=1{,}013889\cdot 10=10{,}139\%$, начисляемая для временной базы $K=365$ (точные проценты).

Пример 1.3. Начисленная за 10 дней ссуды сумма процентов составила 15 тыс. руб. (временная база 360 дней). Необходимо определить аналогичную сумму при условии начисления точных процентов (временная база $K=365$ дней). Согласно (1.3) находим

$$I_m=0{,}986301\cdot 15=14{,}79 \text{ тыс. руб.} \qquad \#3$$

Переменные ставки. Реинвестирование. В кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае наращенная сумма определяется по следующей формуле.

$$S=P(1 + n_1i_1 + n_2i_2 + \ldots)=P(1+\sum_t n_ti_t), \tag{1.8}$$

где i_t, n_t — ставка простых процентов и продолжительность периода ее начисления в периоде t.

Пример 1.4. Контракт предустатривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 6%, в каждом следующем полугодии ставка повышается на 0,5%. Необходимо определить множитель наращения за 2,5 года. Находим

$$1+\sum_{t=1}^{m} n_ti_t=1+0{,}06+0{,}5\cdot 0{,}065+0{,}5\cdot 0{,}07+0{,}5\cdot 0{,}075=1{,}165,$$

где m - число полугодий. #4

В практике, особенно при инвестировании средств в краткосрочные депозиты по простой процентной ставке, иногда прибегают к неоднократному повторению операции в пределах заданного срока N, т. е. к дальнейшему *реинвестированию* наращенных на каждом шаге операции средств. Наращенная сумма для всего срока составит

$$S=P(1+n_1i_1)(1+n_2i_2)\ \ldots\ , \tag{1.9}$$

где n_1, n_2,... — продолжительности периодов наращения; $\sum_{t=1}^{m} n_t=N$; i_1, i_2 — ставки, по которым производится реинвестирование.

Если периоды начисления равны, то формула наращения имеет вид

$$S=P(1+ni)^m, \tag{1.10}$$

где m — общее число операций реинвестирования.

Пример 1.5. На сумму 10 тыс. руб. в течение месяца начисляются простые проценты по ставке 10% годовых. Какова будет наращенная сумма, если эта операция будет повторена в течение первого квартала года? По формуле (1.9) находим

$$S=10\cdot(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}1)(1+\frac{28}{365}\cdot 0{,}1)(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}1)=10{,}251 \text{ тыс. руб.}$$

Близкий результат дает в этом примере и приближенное измерение времени (по 30 дней в месяце) :

$$S=10\cdot(1+\frac{30}{365}\cdot 0{,}1)^3=10{,}249 \text{ тыс. руб.}$$ #5

Наращение процентов в потребительском кредите (равномерная выплата процентов). В потребительском кредите простые проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент выдачи кредита (flat rate of interest, add-on interest). Погашение долга с процентами производится частями, равномерно на протяжении всего срока кредита. Из сказанного следует, что наращенная сумма долга равна

$$S=P(1+ni), \tag{1.11}$$

а сумма разового погасительного платежа

$$q=\frac{S}{nm}, \tag{1.12}$$

где q — сумма погасительного платежа; n — срок кредита в годах; m — число погасительных платежей в году.

В связи с тем, что проценты начисляются на первоначальную сумму долга, а фактическая сумма долга систематически уменьшается во времени, действительная процентная ставка (по фактически использованному кредиту) оказывается заметно выше, чем ставка по условию потребительского кредита. Проблема измерения действительной процентной ставки в потребительском кредите рассматривается в главе 8.

Пример 1.6. Кредит для покупки товара на сумму 1000 руб. открыт на три года, процентная ставка — 4%, погашение в конце каждого месяца. Сумма, которая должна быть погашена за три года, составит $S=1000\cdot(1+3\cdot 0{,}04)=1120$ руб. Ежемесячный погасительный платеж равен

$$\frac{1120}{3\cdot 12}=31{,}11 \text{ руб.}$$ #6

1.4. Дисконтирование и учет по простым ставкам

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной определению наращенной суммы: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Такая ситуация может возникнуть, например, при разработке условий контракта. Кроме того, задача расчета P по S возникает и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются непосредственно при выдаче ссуды. В этом случае говорят, что сумма S *дисконтируется*, сам процесс начисления и удержания процентов вперед называют *учетом*, а проценты в виде разности $S-P=D$ — *дисконтом*. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке банком или другим финансовым учреждением краткосрочных обязательств (векселей, тратт и т. д.), оплата которых должником производится в будущем. Термин дисконтирование употребляется и в более широком смысле — как средство определения любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит величину S, вне зависимости от того, действительно имела место финансовая операция (кредитование, выдача денег в долг и т. д.), предусматривающая начисление процентов, или нет. Такой расчет часто называют *приведением* стоимостного показателя к заданному моменту времени. Величину P, найденную дисконтированием S, называют часто *современной*, или *приведенной*, величиной S (present value). Это понятие является одним из важнейших в современном количественном анализе финансовых операций, поскольку именно с помощью дисконтирования учитывается такой фактор, как время.

Исходя из вида процентной ставки применяют два вида дисконтирования — математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Математичесоке дисконтирование представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной суммы ссуды, депозита и т. д. Задача в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму надо выдать в долг, чтобы при начислении на нее процентов по ставке i к концу срока получить наращенную сумму, равную S. Решив уравнения (1.1) относительно P, получим

$$P=S\cdot\frac{1}{1+ni}\quad, \qquad (1.13)$$

где $n=\frac{t}{K}$, $\quad\frac{1}{1+ni}$ — *дисконтный множитель.*

Дисконтный множитель показывает какую долю составляет P в величине S. Разность $S-P$ в этом случае можно рассматривать не только как проценты, начисленные на P, но и как дисконт суммы S. Последний обозначим как D_i.

Пример 1.7. Через 180 дней с момента подписания контракта должник уплатит 31 тыс. руб. Кредит предоставлен под 6% годовых. Определить, какую сумму получит должник и сумму дисконта. По (1.13) при условии, что временная база равна 365 дням, находим

$$P=\frac{31\,000}{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}06}=30\,109{,}1 \text{ руб.}; \; D_i=S-P=890{,}9 \text{ руб.} \qquad \#7$$

Банковский учет (учет векселей). Суть операции учета заключается в том, что банк или какое-либо иное финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т. е. приобретает (или учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк таким образом реализует дисконт. Владелец векселя, с помощью его учета, имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока. При учете векселей применяется *банковский*, или *коммерческий*, учет (bank discount). Согласно этому методу проценты за пользование ссудой начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока ссуды (maturity value). При этом применяется учетная ставка d, которая уже упоминалась выше. Учетные ставки в расчетах удобнее всего измерять в десятичных дробях. По определению простая годовая учетная ставка находится как $d=(S-P)/S$, в то время как простая ставка процентов равна отношению $i=(S-P)/P$. Размер дисконта или учета (D_d), удерживаемого банком, равен Snd, отсюда

$$P=S-Snd=S(1-nd), \qquad (1.14)$$

где n — продолжительность срока в годах от момента учета до даты уплаты по векселю, $(1-nd)$ — дисконтный множитель.

Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням ($K=360$), а число дней в периоде обычно берется точным.

Поясним смысл учета по простой учетной ставке, обратившись к графику. На рис. 1.2. показан процесс дисконтирования суммы S, которая должна быть уплачена спустя время n после начального момента. Если учет производится на этот момент, то сумма после вычета дисконта составит величину P, если же учет производится за время n' до наступления срока уплаты, то искомая сумма равна $P'=S-Sn'd$. Учет портфеля векселей (операция «а форфэ» (a forfait) — целиком, общей суммой) с последовательными сроками уплаты по ним рассматривается в главе 9.

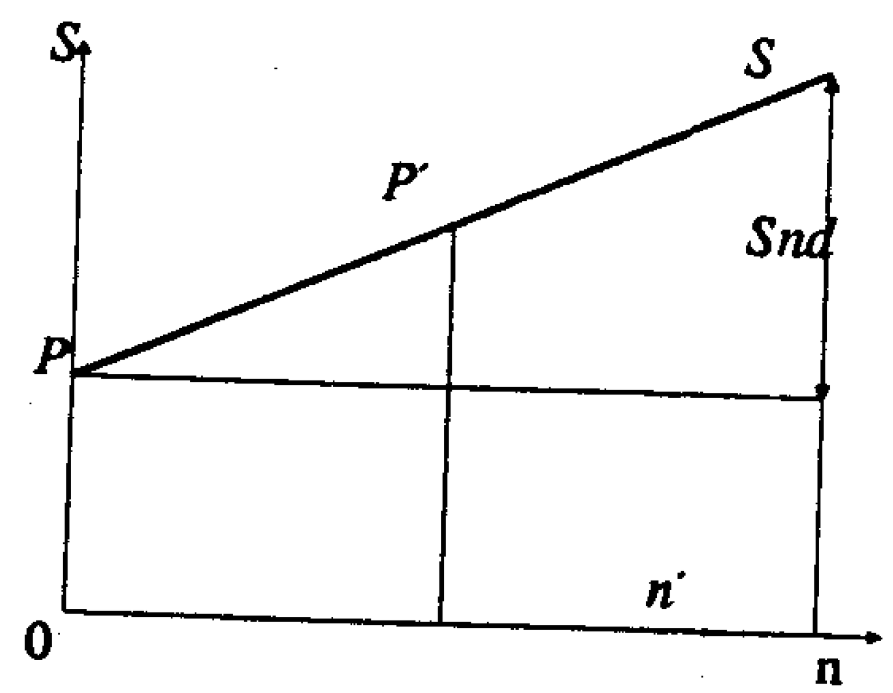

Рис. 1.2

Пример 1.8. Тратта (переводной вексель) выдана на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11. Владелец документа учел его в банке 23.09 по учетной ставке 8%.

Так как оставшийся до погашения обязательства период равен 55 дням, то полученная сумма (без уплаты комиссионных) составит

$$P=100\,000\cdot(1-\frac{55}{360}\cdot 0{,}08)=98\,777{,}78 \text{ руб.},$$

а дисконт равен

$$D_d=100\,000-98\,777{,}78=1\,222{,}22 \text{ руб.}$$

#8

Область применения учетных ставок не ограничивается учетом векселей. Этот вид ставок может использоваться и в других видах финансово-кредитных операций. Попутно заметим, что термин «учетная ставка» иногда применяется, на наш взгляд не вполно корректно, в более широком смысле — как синоним процентной ставке вообще.

Рассмотренные два метода дисконирования — по ставке i и d, приводят к разным финансовым результатам. Заметим, что учетная ставка отражает фактор времени более «жестко». Так, из формулы (1.14) следует, что при $n\geq 1/d$ величина P станет отрицательной. Иначе говоря, при относительно большом сроке уплаты по векселю и высокой учетной ставке дисконт может привести к нулевой или даже отрицательной сумме P, что, разумеется, лишено смысла. Например, при $d=0{,}2$ уже пятилетний срок достаточен для того, чтобы сторона, учитывающая вексель, ничего не получила по нему. Такая ситуация не может возникнуть при математическом дисконтировании: при любом сроке современная величина платежа здесь больше нуля. В таблице 1.1 для иллюстрации приведены дисконтные множители, рассчитанные для одного и того же значения простой ставки процентов и учетной ставки.

Таблица 1.1

Дисконтные множители ($i=d=10\%$)

Вид ставки	n					
	1/12	1/4	1/2	1	2	10
i	0,99174	0,97561	0,95238	0,90909	0,83333	0,5
d	0,99167	0,975	0,95	0,9	0,8	0

Наращение по учетной ставке. Простая учетная ставка может быть примененена и при расчете наращенной суммы. В этом возникает необходимость, в частности, при определении суммы, которую надо проставить в бланке векселя, если заданы текущая сумма долга, его срок и учетная ставка. Наращенная сумма

$$S=P\cdot\frac{1}{1-nd}\,. \tag{1.15}$$

Здесь $1/(1-nd)$ — множитель наращения; n — продолжительность ссуды в годах. При $n=1/d$ расчет по формуле (1.15) лишен смысла, так как наращенная сумма становится бесконечно большим числом. Простая учетная ставка дает более быстый рост суммы ссуды, чем аналогичная по величине ставка простых процентов. Иллюстация приведена в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Множители наращения по простой ставке процентов и учетной ставке ($i=d=10\%$)

Вид ставки	n					
	1/12	1/4	1/2	1	2	10
i	1,0083	1,025	1,05	1,1	1,2	2
d	1,0084	1,0256	1,0526	1,1111	1,25	∞

Пример 1.9. Найти наращенную сумму для данных примера 1.2 при условии, что проценты начисляются по простой учетной ставке, равной 8%. По формуле (1.15) находим:

$$S=100\,000\cdot\frac{1}{1-\frac{258}{360}\cdot 0{,}08}=106\,082{,}04 \text{ руб.}$$ #9

Операции начисления процентов и дисконтирования по учетной ставке могут совмещаться, например, при учете платежного обязательства, предусматривающего начисление простых процентов. В этом случае сумма долга на конец срока представляет собой наращенную величину долга. При учете такого платежного обязательства приходится решать две задачи. Первая заключается в определении наращенной суммы S, вторая — в расчете суммы, полученной при учете. Оба последовательных действия можно записать в виде формулы

$$P_2=P_1(1+n_1 i)(1-n_2 d),$$

где P_1 — первоначальная сумма ссуды; P_2 — сумма, получаемая при учете обязательства; n_1 — общий срок платежного обязательства (срок начисления процентов); n_2 — срок от момента учета обязательства до даты погашения долга, $n_2 \leq n_1$.

Пример 1.10. Обязательство уплатить через 180 дней 30 тыс. руб. с процентами (6% годовых) было учтено за 120 дней до наступления срока, учетная ставка 7,5%. Полученная при учете сумма без комиссионных составит

$$P_2=30\cdot\left(1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}06\right)\left(1-\frac{120}{360}\cdot 0{,}075\right)=30{,}115 \text{ тыс. руб.}$$

#10

1.5. Определение продолжительности ссуды и уровня процентной ставки

При разработке условий контрактов или их анализе иногда возникает необходимость в решении обратных задач — определении срока ссуды или уровня процентной ставки при всех прочих заданных условиях.

Формулы для расчета продолжительности ссуды в годах и днях получим, решив соответствующие уравнения относительно n и d: срок ссуды в годах

$$n=\frac{S-P}{Pi}=\frac{S/P-1}{i}; \qquad n=\frac{S-P}{Sd}=\frac{1-P/S}{d}; \qquad (1.16)\ (1.17)$$

срок ссуды в днях

$$t=\frac{S-P}{Pi}\cdot K=\frac{S/P-1}{i}\cdot K; \qquad (1.18)$$

$$t=\frac{S-P}{Sd}\cdot K=\frac{1-P/S}{d}\cdot K. \qquad (1.19)$$

Пример 1.11. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 10 тыс. руб., вырос до 10,5 тыс. руб. при условии, что на сумму долга начисляются простые проценты ($K=365$) по ставке 8%?

По формуле (1.18) находим

$$t=\frac{10{,}5-10}{10\cdot 0{,}08}\cdot 365=228{,}1\approx 228 \text{ дней.}$$ #11

Необходимость определения уровня процентной ставки по остальным заданным условиям сделки возникает, в частности, при сравнении контрактов по степени доходности в случаях, когда процентные ставки в явном виде не указаны. Решив уравнения наращения или дисконтирования относительно i и d, получим:

ставка процентов

$$i=\frac{S-P}{Pn}=\frac{S-P}{Pt}\cdot K; \qquad (1.20)$$

учетная ставка

$$d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{S-P}{St}\cdot K, \qquad (1.21)$$

где K — временная база начисления процентов, $K=365(366)$ или 360.

Пример 1.12. В контракте предусматривается погашение обязательства через 120 дней в сумме 12 тыс. руб., первоначальная сумма долга — 11,5 тыс. руб. Необходимо определить доходность операции для кредитора в виде учетной ставки и ставки процентов. В обоих случаях $K=360$. По формулам (1.20) и (1.21) получим

$$d=\frac{12-11{,}5}{12\cdot 120}\cdot 360=0{,}125, \text{ т. е. } 12{,}5\%,$$

$$i=\frac{12-11{,}5}{11{,}5\cdot 120}\cdot 360=0{,}1304, \text{ т. е. } 13{,}04\%$$ #12

Иногда в контрактах размер дисконта фиксируется в виде процента за весь срок ссуды. В этом случае практически важно определить цену кредита в виде процентных ставок i или d. Искомые параметры находятся элементарно

$$i=\frac{d_a}{n(1-d_a)}; \qquad d=\frac{d_a}{n}, \qquad (1.22);\ (1.23)$$

где d_a — относительная величина дисконта.

Пример 1.13. Стороны договорились о том, что из суммы кредита, выданного на 210 дней, удерживается дисконт в размере 12%. Необходимо определить цену кредита в виде простой учетной ставки d и ставки процентов i. Находим

$$d=\frac{0{,}12}{210/365}=0{,}2086, \text{ т. е. } 20{,}86\%$$

$$i=\frac{0{,}12}{\frac{210}{365}\cdot(1-0{,}12)}=0{,}2370, \text{ т. е. } 23{,}7\%.$$

#13

Из приведенного выше материала и, особенно, последних примеров, следует, что выбор конкретного вида ставки существенно влияет на финансовые результаты операции. Вместе с тем, нетрудно догадаться, что возможен такой выбор размеров различных видов процентных ставок, при котором результаты будут равноценными. Эта проблема (проблема эквивалентности ставок) рассматривается в третьей главе книги.

ГЛАВА 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1 Начисление сложных годовых процентов

Формула наращения. В долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, для наращения суммы ссуды, как правило, применяют *сложные проценты* (compound interest). База для начисления сложных процентов (в отличие от простых) не остается постоянной — она увеличивается с каждым шагом во времени, и процесс роста первоначальной суммы ссуды (ее наращение) происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов.*

В практических расчетах в основном применяют так называемые *дискретные проценты*, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Иначе говоря, время рассматривается как дискретная переменная. В некоторых случаях — в доказательствах и расчетах, связанных с непрерывными процессами, в общих теоретических построениях, а иногда и на практике — возникает необходимость в применении *непрерывных процентов* (continuous interest).

Найдем формулу для расчета наращенной суммы при условии, что проценты капитализируются один раз в год (годовые проценты). Введем обозначения: i, как и прежде, означает годовую ставку процента, P — первоначальный размер ссуды, S — наращенную сумму и n — число лет наращения. Очевидно, что в конце первого года проценты равны Pi, а наращенная сумма составит величину $P+Pi=P(1+i)$. К концу второго года она достигает величины $P(1+i)+P(1+i)i=P(1+i)^2$ и т.д. В конце n-го года наращенная сумма составит

$$S=P(1+i)^n. \qquad (2.1)$$

Итак, рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель — $(1+i)$. Прогрессия состоит из следующих членов: P, $P(1+i)$, $P(1+i)^2$, ... , $P(1+i)^n$. Последний член этого ряда соответствует наращенной сумме к концу срока ссуды. Величину $(1+i)^n$ называют *множителем наращения.* Значения множителя наращения $(1+i)^n$ для целых чисел n приведены в таблице сложных процентов (Приложение 2). В этой таблице множители наращения определены для n от 1 до 50, 60, ... , 90, 100 лет.

Поскольку в финансовых вычислениях конечный результат обычно представляет собой денежную сумму, то точность расчетов множителей определяется допустимой степенью ее округления. Как правило, расчет ведется до последней денежной единицы.

Пример 2.1. В какую сумму обратится долг, равный 10 тыс. руб., через 5 лет при росте по сложной ставке 5,5%? По таблице сложных процентов находим $1{,}055^5=1{,}30696$, откуда $S=13\,069{,}6$ руб.

Пусть теперь срок ссуды превышает 50 лет, например $n=52$ года. В этом случае находим два табличных значения множителя: $1{,}055^{50}$ и $1{,}055^2$. После чего

$$S=10\,000\cdot1{,}055^{52}=10\,000\cdot1{,}055^{50}\cdot1{,}055^2=$$

$$10\,000\cdot14{,}541961\cdot1{,}113025=161\,855{,}66 \text{ руб.}$$

#1

Таблицы сложных процентов, естественно, не могут охватить все возможные значения i. При отсутствии необходимых табличных данных или соответствующего калькулятора множитель наращения можно приближенно рассчитать, логарифмируя $(1+i)^n$, или с помощью линейной интерполяционной формулы

$$q^n=q_н^n+\frac{i-i_н}{i_в-i_н}\cdot(q_в^n-q_н^n), \tag{2.2}$$

где q^n — интерполяционная оценка множителя наращения; $i_в$ и $i_н$ — верхнее и нижнее значения ставки процентов; $q_в^n$ и $q_н^n$ — соответствующие верхнее и нижнее табличные значения множителя.

Значения множителя, полученное по интерполяционной формуле (2.2), всегда больше точного, причем чем меньше разность $i_в-i_н$ тем точнее интерполяционная оценка. Интерполяционный метод следует применять лишь при ориентировочных расчетах или в операциях с незначительными денежными суммами.

Пример 2.2. Определить множитель наращения для $i=6{,}2\%$, $n=10$ лет. Пусть ближайщие табличные значения множителя имеются только для $i=6\%$ и $i=6{,}5\%$; они равны 1,7908477 и 1,8771375. Соответственно

интерполяционное значение множителя наращения для $i=6{,}2\%$ составит

$$q^n=1{,}7908477+\frac{0{,}062-0{,}06}{0{,}065-0{,}06}\cdot(1{,}8771375-1{,}7908477)=1{,}8253636.$$

Точное значение множителя равно 1,8249256. Расхождение между результатами, полученными по точной и интерполяционной формулам, проявилось здесь уже в третьем десятичном знаке.

#2

Формула (2.1) предполагает, что ставка процентов постоянна на протяжении всего срока ссуды. Неустойчивость кредитно-денежного рынка заставляет владельцев денег модернизировать «классические» схемы предоставления денег в долг. Выше уже упоминалось о введении в практику «плавающих» ставок (floating rate). При наличии такой ставки, естественно, невозможно выполнить какие-либо расчеты на перспективу, так как конкретные значения ставки неизвестны. Иное дело, если предусматриваются меняющиеся во времени, но фиксированные процентные ставки. В этом случае общий множитель наращения равен произведению частных множителей:

$$S=P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_k)^{n_k}, \tag{2.3}$$

где i_1, i_2, ... , i_k — последовательные значения ставок процентов; n_1, n_2, ... , n_k — периоды, в течение которых «работают» соответствующие ставки.

Пример 2.3. Процентная ставка по ссуде определена на уровне 8,5% плюс маржа — 0,5% в первые два года, 0,75% в следующие три года. Множитель наращения в этом случае составит

$$1{,}09^2\cdot1{,}0925^3=1{,}54923512.$$

#3

Скорость роста при сложных и простых процентах. Наращение по сложным процентам, как уже говорилось выше, следует геометрической прогрессии и при большом числе периодов начисления приводит к «устрашающим» результатам. Здесь уместна следующая иллюстрация. Остров Манхэттен, на котором расположен центр Нью-Йорка, был «куплен» в 1624г. у индейского вождя за 24 долл. 350 лет спустя стоимость земли оценивалась примерно в 40 млрд. долл.*, т.е. рост

* *См.: Томас Д. Воротилы финансового мира / Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1976. — с. 223.*

суммы в $1{,}666 \cdot 10^9$ раз. Заметим, однако, что такой рост за указанный период достигается при весьма скромной ставке сложных процентов — всего 6,3%.

Соотношение значений множителей наращения по простым и сложным годовым ставкам процентов при одинаковой абсолютной величине ставок зависит от срока ссуды:

для срока меньше года ($n<1$)

$$(1+ni_n)>(1+i_c)^n;$$

для срока больше года ($n>1$)

$$(1+ni_n)<(1+i_c)^n,$$

где i_n и i_c — ставки простых и сложных процентов;

для срока равного году ($n=1$), множители наращения равны друг другу при условии, что временная база для начисления простых и сложных процентов одна и та же.

С увеличением срока (при $n>1$) различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается. Графическая иллюстрация соотношений множителей приведена на рис 2.1. В табл. 2.1 показаны множители наращения по простым и сложным ставкам для разных сроков ссуды.

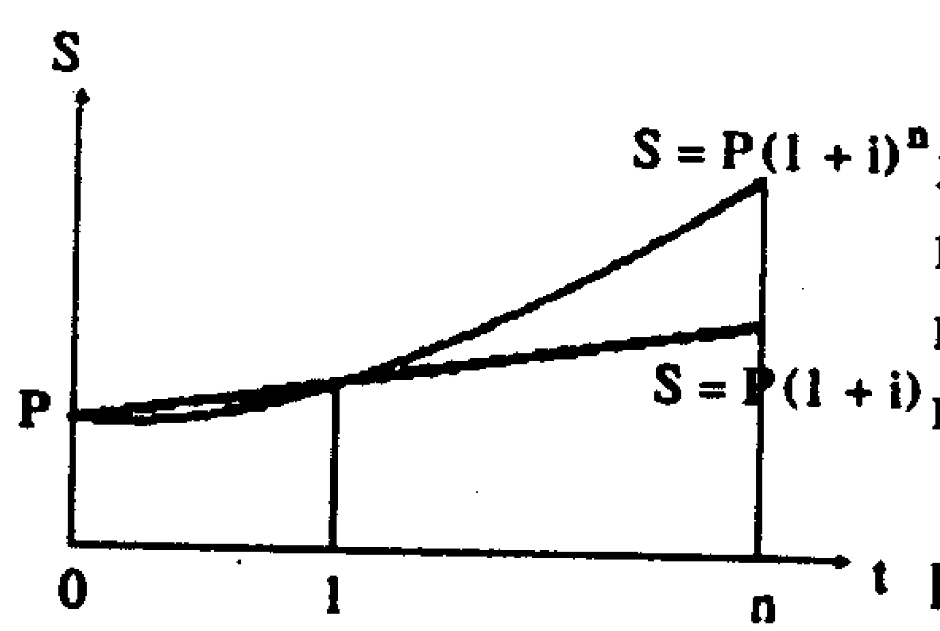

Рис. 2.1

Таблица 2.1

Сравнение множителей наращения ($i_n=i_c=8\%$)

Множители наращения	Срок ссуды						
	30 дн.	180 дн.	1 год	5 лет	10 лет	50 лет	100 лет
$1+ni_n$	1,00657	1,0394	1,08	1,4	1,8	5,0	9,0
$(1+i_c)^n$	1,00635	1,0392	1,08	1,4693	2,1589	46,9	2199,8

Множители наращения определены для временной базы $K=365$ дней.

Формулы удвоения. Различия в последствиях применения сложных и простых процентов наиболее наглядно проявляется при определении времени, необходимого для заданного увеличения первоначальной суммы P в N раз. Очевидно, что при подобном росте множитель наращения равен N. Таким образом,

а) для простых процентов

$$(1+ni_n)=N, \text{ откуда } n=\frac{N-1}{i_n};$$

б) для сложных процентов

$$(1+i_c)^n=N, \text{ следовательно, } n=\frac{\ln N}{\ln(1+i_c)}.$$

Здесь как и выше i_n и i_c — годовые ставки простых и сложных процентов.

Пример 2.4. Определим число лет, необходимое для увеличения первоначального капитала в 5 раз, применяя сложные и простые проценты, ставка — 5%:

$$n=\frac{\ln 5}{\ln 1{,}05}\approx 33;$$

$$n=\frac{5-1}{0{,}05}=80.$$

#4

Наиболее наглядно влияние ставки процентов на процесс наращения можно представить, сопоставляя числа лет, необходимых для удвоения первоначальной суммы. В этом случае, приняв в приведенных выше формулах $N=2$, получим следующие *формулы удвоения*:

а) удвоение по простым процентам $n=\dfrac{1}{i_n}$;

б) удвоение по сложным процентам $n=\dfrac{\ln 2}{\ln(1+i)}$.

Для грубых прикидок числа лет удвоения по сложным процентам можно воспользоваться соотношением $n\approx 0{,}7/i$, которое получим из формулы удвоения по сложным процентам, подставив значения $\ln 2\approx 0{,}7$ и $\ln(1+i)\approx i$. Результаты применения формул удвоения для разных значений простых и сложных ставок приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Число лет, необходимое для удвоения первоначальной суммы при сложных и простых процентах.

Ставка процентов, %	Число лет	
	сложные проценты	простые проценты
2	35	50
5	14,2	20
8	9	12,5
10	7,3	10
15	5	6,7

Начисление годовых процентов при дробном числе лет. В случаях, когда n не является целым числом, т.е. состоит из целой и дробной частей, наращение определяется двумя способами: по формуле (2.1) и на основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное — простые:

$$S=P(1+i)^a\cdot(1+bi), \tag{2.4}$$

где $n=a+b$, a — целое число лет, b — дробная часть года.

При выборе метода расчета множителя наращение следует иметь в виду, что величина множителя по второму способу получается больше, чем по первому, так как $1+ni>(1+i)^n$ при $n<1$. Наибольшая разница наблюдается при $b=1/2$.

Пример 2.5. Кредит в размере 30 тыс. руб. выдан на срок 3 года и 160 дней. Если обусловленная в контракте ставка равна 6,5% и предусмотрен смешанный метод начисления процентов, то сумма долга на конец срока составит

$$S=30\,000\cdot1{,}065^3\cdot(1+160/365\cdot0{,}065)=37\,271{,}04 \text{ руб.}$$

Расчет по формуле (2.1) дает

$$S=30\,000\cdot1{,}065^3\cdot1{,}065^{160/365}=37\,252{,}8 \text{ руб.}$$

#5

В правилах ряда коммерческих банков предусматривается, что проценты начисляются только за полные истекшие периоды, а за отрезки времени, меньшие, чем периоды начисления, проценты не начисляются.

2.2. Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. В современных условиях проценты, как правило, капитализируется не один, а несколько раз в год — по полугодиям, кварталам и т.д. В этом случае для наращения можно воспользоваться формулой наращения (2.1), в которой n теперь означает общее число периодов роста, а i — процентная ставка за соответствующий период. Например, при поквартальном начислении процентов за 5 лет по ставке 3% за квартал получим множитель наращения, равный $1{,}03^{20}$. В практике, однако, применяют другой метод расчета, так как обычно в контрактах фиксируется годовая ставка с указанием периода начисления, а не ставка за период. Итак, пусть годовая ставка равна j, а число периодов начисления в году m. Тогда каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставка j называется *номинальной* (nominal rate).

Начисления процентов по номинальной ставке производятся по формуле

$$S=P(1+j/m)^N, \tag{2.5}$$

где N — количество периодов начисления. Если N — целое число, то при определении величины множителя наращения $(1+j/m)^N$ в большинстве случаев можно воспользоваться таблицей сложных процентов (Приложение 2). В этом случае берется то табличное значение множителя, которое соответствует значению $i=j/m$, а вместо n — общее число периодов начисления N. Например, для $j=20\%$ и поквартальном начислении процентов в течение 5 лет находим табличное значение для $i=20/4=5\%$ и $N=4\cdot5=20$, которое равно $1{,}05^{20}=2{,}653298$.

Пример 2.6. Первоначальная сумма ссуды 10 тыс.руб., срок 5 лет, проценты начисляются в конце каждого квартала, номинальная годовая ставка 5%. Требуется определить наращенную сумму. По условиям задачи $P=10\,000\cdot(1+0{,}05/4)^{4\cdot5}=12\,820{,}37$ руб.

Пусть теперь срок кредита не 5, а 16 лет, в этом случае $N=4\cdot16=64$, и необходимое значение множителя наращения составит

$$1{,}0125^{60}\cdot1{,}0125^4=26\,214\,532.$$

#6

Нетрудно догадаться, что чем больше m, тем быстрее идет процесс наращения. Это вытекает из логики самого роста по сложным процентам — чаще происходит их капитализация. Например, при ставке $j=12\%$ начисление процентов по полугодиям за 10 лет дает множитель наращения, равный $1{,}06^{20}=3{,}20714$, а при ежемесячном начислении $1{,}01^{120}=3{,}30039$.

Выше была рассмотрена ситуация, когда при начислении годового процента срок ссуды измеряется дробным числом. Аналогичное положение возникает и при m-разовом начислении процентов в году. Представим общую протяженность срока ссуды N в виде суммы числа полных периодов начисления процентов (ml) и дробной части одного периода начисления (a), т.е. $N=ml+a$, где l — число полных периодов. Например, пусть проценты начисляются по полугодиям ($m=2$), а общий срок ссуды 27 месяцев. Тогда $N=27/6=4{,}2$, $l=2$, $ml=4$ и $a=0{,}2$. В этих случаях наращение производится по формуле (2.5) или, согласно смешанному методу, по формуле

$$S=P(1+j/m)^{ml}(1+aj/m). \tag{2.6}$$

Пример 2.7. Во что обратится сумма, равная 10 тыс.руб., через 25 месяцев, если проценты начисляются ежеквартально. Номинальная ставка равна 6%. По условиям задачи $N=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$, причем $ml=2\cdot4=8$, $a=1/3$. Откуда

$S=10\,000\cdot(1+0{,}06/4)^8\cdot(1+0{,}06/4)^{1/3}=10\,000\cdot1{,}126493\cdot1{,}004975=11\,320{,}97$ руб.

Начисление процентов за один месяц (или 1/3 квартала) дало дополнительное увеличение суммы почти на 0,5%. На основе смешанного метода получим

$$S=10000\cdot(1+0{,}06/4)^8\cdot(1+1/3\cdot0{,}06/4)=11\,321{,}25 \text{ руб.}$$

#7

Эффективная ставка. Введем теперь новое понятие — действительную, или *эффективную* ставку процентов (effective rate). Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

Обозначим эффективную ставку через i. Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то по определению можно записать следующее равенство:

$$(1+i)^n=(1+j/m)^{mn}, \tag{2.7}$$

откуда

$$i=(1+j/m)^m-1. \tag{2.8}$$

Пример 2.8. Пусть банк начисляет проценты на вклад исходя из номинальной ставки 12% годовых. Эффективная (годовая) ставка при ежедневной капитализации процентов равна:

$i=(1+0{,}12/365)^{365}-1=0{,}12747$, т. е. 12,747%.

В то же время ежемесячное начисление дает

$i=(1+0{,}12/12)^{12}-1=0{,}12682$, т. е. 12,682%.

Как видим, разница между ставками менее ощутимая, чем при увеличении m от 1 до 12.

#8

О соотношении эффективных и номинальных ставок можно судить по данным таблицы 2.3.

Таблица 2.3

Номинальные и эффективные ставки процентов.

j (%)	i (%)		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
3	3,0225	3,0339	3,0416
5	5,0626	5,0945	5,1162
8	8,1600	8,2432	8,3000
10	10,2500	10,3813	10,4713

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении процентов m раз в год на эффективную ставку i, которая определяется по формуле

(2.8), не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. Например, сторонам безразлично применить ставку $j=10\%$ при начислении процентов 4 раза в год или годовую ставку $i=10{,}3813\%$. Две приведенные ставки *эквивалентны* в финансовом отношении.

В практике начисление процентов несколько раз в год производится или непосредственно по формуле (2.5) (например, в США), или сначала по формуле (2.7) расчитывают эффективную ставку i, а затем по формуле наращения (2.1) определяют величину S (так обычно поступают в европейских странах).

При подготовке контрактов может возникнуть необходимость и в определении j по заданному значению i. В этом случае получим

$$j=m((1+i)^{1/m}-1). \tag{2.9}$$

2.3. Учет (дисконтрование) по сложной ставке процентов

При изучении простых процентов были рассмотрены два вида учета — математический и банковский (коммерческий). Первый заключался в определении P по значению S при заданном значении ставки процентов, второй — при заданном значении учетной ставки. Применим математический учет, основываясь теперь на ставке сложных процентов. Для этого решим уравнение (2.1) относительно P:

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=Sv^n, \tag{2.10}$$

где

$$v^n=\frac{1}{(1+i)^n}=(1+i)^{-n}. \tag{2.11}$$

Величину v^n называют *учетным*, или *дисконтным, множителем*. Значения этого множителя табулированы для целого числа лет — см. Приложение 3.

Обобщим формулу (2.10) для случая, когда проценты начисляются m раз в году, получим

$$P=\frac{S}{(1+j/m)^{mn}}=Sv^{mn}. \tag{2.12}$$

Дисконтный множитель здесь равен:

$$v^{mn}=\frac{1}{(1+j/m)^{mn}}=(1+j/m)^{-mn}. \tag{2.13}$$

Значения дисконтного множителя v^{mn}, если mn — целое число, можно найти в Приложении 3, где приведены величины множителя v^n. Для этого отыскивается табличное значение множителя, которое соответствует $i=j/m$, вместо n берется общее число периодов mn. Например, если определяется v^{mn} для $j=12\%$, $m=4$ и $n=5$, то находится табличное значение дисконтного множителя для $i=3\%$ и $n=20$, т.е. $(1+0{,}03)^{-20}$.

Величину P, полученную дисконтированием S, часто называют *современной* (present value), а иногда *приведенной величиной* S. Она характеризует ту исходную (базовую) сумму, начисление процентов на которую дает величину S. Суммы P и S связаны между собой сроком и процентной ставкой и в известном смысле эквивалентны: платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент. Разность $S-P$ в случае, когда P определено по (2.10) или (2.12), называют дисконтом:

$$D_i=S-P=S(1-v^n);\; D_i=S-P=S(1-v^{mn}).$$

Пример 2.9 Необходимо определить современную величину 50 тыс. руб., которые будут выплачены через 5 лет. При расчете применяется ставка сложных процентов, равная 5%. Величину дисконтного множителя находим по Приложению 3: $1{,}05^{-5}=0{,}78353$. Откуда $P=50\cdot 1{,}05^{-5}=50\cdot 0{,}78353=39{,}176$ тыс.руб. Если на эту сумму наращивать сложные проценты (5%), то к концу пятилетия она увеличится до 50 тыс. руб. Пусть теперь срок ссуды не 5, а 52 года. Тогда получим

$$P=50\cdot 1{,}05^{-50}\cdot 1{,}05^{-2}=50\cdot 0{,}087204\cdot 0{,}907029=3{,}955 \text{ тыс.руб.}$$

Допустим дисконтирование производится не один, а четыре раза в году (поквартально), тогда за пятилетний срок получим

$$P=50\cdot(1+0{,}05/4)^{-4\cdot 5}=39 \text{ тыс.руб.}$$ #9

Поскольку современная величина платежа при начислении сложных процентов — одна из основных финансовых характеристик, широко используемая при решении разнообразных проблем, рассмотрим некоторые ее формальные свойства. Прежде всего отметим очевидное свойство — чем выше ставка процентов, тем сильнее дисконтирование и, следовательно, в большей степени уменьшается P при всех прочих равных условиях.

Несколько слов о влиянии срока платежа. Интуитивно понятно, что значение современной величины при увеличении срока платежа будет убывать. Определим предел значения P при n, стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} P=\lim_{n\to\infty}\frac{S}{(1+i)^n}=0.$$

Отсюда следует, что при очень больших сроках платежа современная величина последнего будет крайне незначительна. Что же касается влияния величины m, то с ее ростом значение v^{mn} уменьшается. Это и следует ожидать исходя из логики процесса — дисконтирование производится не один, а m раз в году.

Следует заметить, что величина P может быть определена на любой момент времени до момента выплаты суммы S. Ясно, что чем ближе момент, для которого определяется современная величина, к моменту выплаты суммы S, тем меньше сумма дисконта. Наращенная сумма на промежуточный момент времени t равна современной величине платежа на этот же момент времени, т.е. $S_t=P_t$. В самом деле, $S_t=P(1+i)^t$ и $P_t=S(1+i)^{-(n-t)}$. В свою очередь $S=P(1+i)^n$, откуда $P_t=$ $=P(1+i)^n(1+i)^{-(n-t)}=P(1+i)^t=S_t$.

Соотношения дисконтных множителей (простая и сложная ставки процентов). Указанные соотношения зависят от срока сделки. При $i_n=i_c$:

для срока меньше года $(1+ni_n)^{-1}<(1+i_c)^{-n}$;

для срока больше года $(1+ni_n)^{-1}>(1+i_c)^{-n}$,

где i_n и i_c — простые и сложные ставки. С увеличением срока различие в величине дисконтных множителей усиливается.

2.4. Операции со сложной учетной ставкой

Учет по сложной годовой учетной ставке. В практике учетных операций иногда используют *сложную учетную ставку.* В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как на каждом шаге во времени учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при учете по простой учетной ставке (см. 1. 4), а к сумме,

уменьшенной на величину дисконта, определенного на предыдущем шаге. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P=S(1-d_c)^n, \qquad (2.14)$$

где d_c — сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D_d=S-S(1-d_c)^n=S(1-(1-d_c)^n).$$

Пример 2.10. Какова сумма дисконта при продаже финансового инструмента на сумму 5 тыс. руб., если срок его погашения равен 2,5 года, а покупатель применил сложную годовую учетную ставку, равную 8%?

$$P=5\cdot(1-0{,}08)^{2{,}5}=5\cdot 0{,}8118=4{,}059 \text{ тыс.руб.}$$

Дисконт составит $5-4{,}059=0{,}941$ тыс.руб.

#10

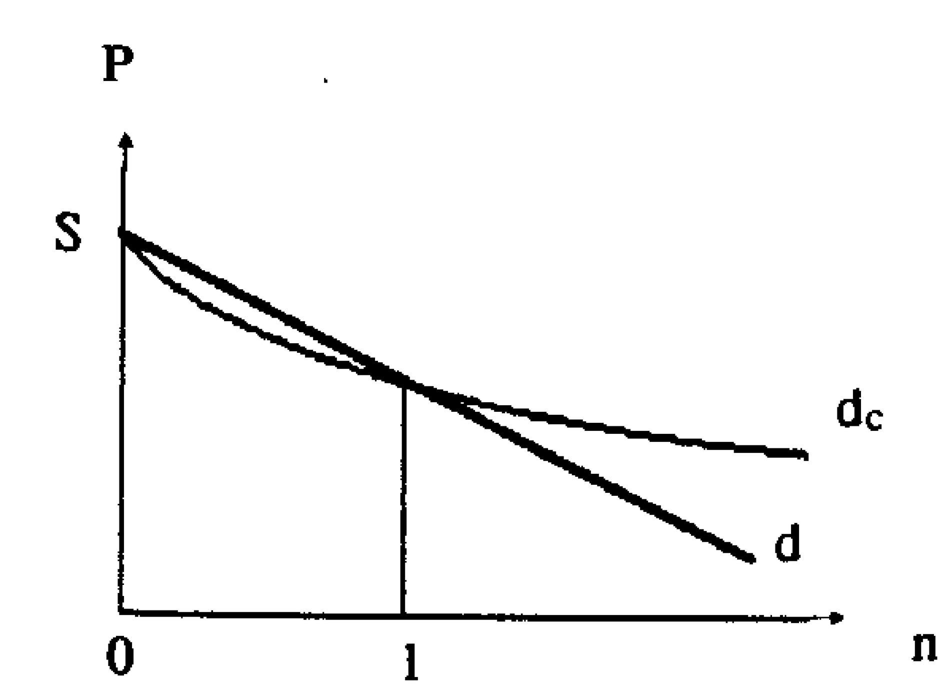

Рис. 2.2

Дисконтирование по сложной учетной ставке приводит к результатам, которые выгоднее для должника, чем при дисконтировании по простой учетной ставке. В самом деле, сравним две формулы: $P=S(1-nd)$ и $P=S(1-d_c)^n$. В первой из них значение дисконтного множителя равномерно падает по мере роста n и достигает нуля уже при $n=1/d$. Во втором — множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля лишь в пределе (при $n\to\infty$). Процесс дисконтирования по простым и сложным учетным ставкам показан на рис.2.2., а конкретные значения соответствующих множителей при разных сроках ссуды в табл.2.4.

Таблица 2.4

Сравнение дисконтных множителей ($d=d_c=8\%$)

Дисконтные множители	Срок ссуды					
	30 дн	180 дн	1год	5 лет	10 лет	50 лет
$(1-nd)$	0,9933	0,96	0,92	0,6	0,2	—
$(1-d_c)^n$	0,9931	0,9592	0,92	0,6591	0,4344	0,0155

Временная база при определении дисконтных множителей равна 360 дням.

Дисконтирование m раз в году. В этом случае применяют *номинальную учетную ставку f.* В каждом периоде дисконтрование осуществляется по ставке f/m.

Дисконтирование по сложной учетной ставке m раз в году

$$P=S(1-f/m)^N, \qquad (2.15)$$

где N — общее число периодов дисконтирования, $N=mn$.

Дисконтирование не один, а m раз в году замедляет этот процесс и, следовательно, уменьшает сумму дисконта при всех прочих равных условиях.

Пример 2.11. Продолжим пример 2.10. Пусть дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а 4 раза в году, тогда $f=0{,}08$, $N=2{,}5\cdot4=10$ и $P=5\cdot(1-0{,}8/4)^{10}=4{,}085$ тыс.руб. Сумма дисконта в этом случае составит

$$5-4{,}085=0{,}915 \text{ тыс. руб.} \qquad \#11$$

Под *эффективной учетной ставкой* будем понимать сложную годовую учетную ставку, эквивалентную номинальной при заданном значении m. Из равенства $(1-f/m)^m=1-d_c$ следует

$$d_c=(1-f/m)^m-1. \qquad (2.16)$$

Выше было показано, что эффективная ставка процентов больше, чем номинальная. В свою очередь эффективная учетная ставка меньше номинальной.

Пример 2.12. Обязательство, равное 20 000 руб., должно быть погашено через 5 лет, учетная ставка 5%, начисление дисконта поквартальное. Найти современную величину обязательства и эффективную учетную ставку. Итак, $S=2\ 000$, $f=0{,}05$, $n=5$, $m=4$. Следовательно,

$$P=20\ 000\cdot(1-0{,}05/4)^{4\cdot5}=15\ 551{,}49;$$

$$d_c=(1-0{,}05/4)^4-1=0{,}0490703, \text{ т. е. } 4{,}907\%. \qquad \#12$$

Наращение по сложной учетной ставке. Выше мы имели дело со случаями, когда сложные проценты начислялись в конце соответствующих периодов. Такие проценты, как говорилось выше, получили название декурсивных. Однако подобный способ начисления процентов не является единственно возможным. Определение начисленных процентов допустимо и с помощью учетной ставки. Из формул (2.14) и (2.15) следует

$$S=\frac{P}{1-d_c}; \qquad S=\frac{P}{(1-f/m)^{mn}}. \qquad (2.17)\ (2.18)$$

Подобный способ, к которому иногда прибегают в практике, назван наращением по сложным антисипативным процентам.

Пример 2.13. Найти наращенную сумму долга, первоначальная сумма которого 10 тыс.руб., срок погашения — 1,5 года. В контракте предусматривается сложная годовая учетная ставка в размере 10%.

$$S=\frac{10}{(1-0{,}1)^{1{,}5}}=11{,}712 \text{ тыс.руб.} \qquad \#13$$

Пример 2.14 Если в условиях предыдущего примера наращение по учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в году, то $f=0{,}1$, $m=4$, $N=4\cdot1{,}5=6$. По формуле (2.18) получим

$$S=\frac{10}{(1-0{,}1/4)^6}=11{,}64 \text{ тыс. руб.} \qquad \#14$$

2.5 Сравнение интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным процентным ставкам

Для расчета наращенных сумм и дисконтирования мы использовали различные виды процентных ставок: i_n, i, j, d, d_c, f. Естественно ожидать, что даже в одинаковых исходных условиях сделки их применение приведет к различным результатам. В связи с этим представляет определенный практический интерес сравнение результатов наращения и дисконтирования по разным видам ставок. Для решения этой задачи достаточно сопоставить множители наращения в первом случае, во втором — дисконтные множители. Частично эта проблема затрагивалась выше — при сравнении процессов наращения по простой и сложной ставке процентов.

Результаты сопоставления зависят от числа периодов начисления процентов. Опустив формальные доказательства, сразу запишем соотношения множителей наращения для трех вариантов количества периодов начисления при условии, что $i_n=i=d=d_c$. Варианты со ставками j и f не рассматриваем, так как результат сравнения зависит от принятого значения m. Итак, имеем при $n<1$

$$(1+i)<1+ni_n<(1-nd)^{-1}<(1-d_c)^{-n}.$$

Так, для ставки 10% и $n=0{,}5$ получим

$$1{,}04881<1{,}05<1{,}05263<1{,}054093.$$

При $n>1$

$$1+ni_n<(1+i)^n<(1-d_c)^{-n}<(1-nd)^{-1}.$$

Для ставки 10% и сроке 5 лет получим

$$1{,}5<1{,}61051<1{,}69351<2{,}0.$$

Наконец при $n=1$

$$1+ni_n=(1+i)^n<1-nd=(1-d_c)^n.$$

Аналогичным образом получим систему неравенств для дисконтных множителей:

при $n<1$ $\quad (1-d_c)^n<1-nd<(1+ni_n)^{-1}<(1+i)^{-n},$

при $n>1$ $\quad 1-nd<(1-d_c)^n<(1+i)^{-n}<(1+ni_n)^{-1},$

при $n=1$ $\quad 1-nd=(1-d_c)^n<(1+ni_n)^{-1}=(1+i)^{-n}.$

2.6. Непрерывное наращение и дисконтирование (непрерывные проценты)

В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, т.е. наращение за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в количественном финансово-экономическом анализе сложных производственных и хозяйственных объектов и явлений, например при обосновании и выборе инвестиционных решений. Необходимость в применении непрерывного наращения (или непрерывных процентов) определяется прежде всего тем, что многие экономические явления по своей природе непрерывны, поэтому аналитическое описание с помощью непрерывных процессов более адекватно, чем на основе дискретных. Немаловажное значение имеет и то, что с помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки и т.д. Применение непрерывных процентов приводит к одинаковым результатам, если применяются эквивалентные процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки — *силу роста* (forse of interest). Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста. Наращенная сумма при дискретных процентах находится с помощью выражения $S=P\cdot(1+j/m)^{mn}$. Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при m, стремящемся к бесконечности, имеем

$$S=\lim_{m\to\infty}P(1+j/m)^{mn}=P\lim_{m\to\infty}((1+j/m)^m)^n.$$

Известно, что $\lim_{m\to\infty}(1+j/m)^m=e^j$, ($e$ — основание натуральных логарифмов). Отсюда множитель наращения равен e^{jn}, а наращенная сумма определяется как $S=Pe^{jn}$.

Итак, при непрерывной капитализации процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и номинальной ставки процентов. Для того, чтобы отличить ставки непрерывных процентов от ставки дискретных процентов, обозначим первую через δ, тогда

$$S=Pe^{\delta n}. \tag{2.19}$$

Из сказанного следует, что сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m=\infty$.

Множитель наращения $e^{\delta n}$ расчитывают с помощью современного калькулятора или находят по таблицам функции e^x. Напомним, что величину e^δ можно найти с любой степенью точности, используя разложение

$$e^\delta=1+\delta+\frac{\delta^2}{2!}+\frac{\delta^3}{3!}+\ \ldots \tag{2.20}$$

Поскольку δ меньше 1 (обычно меньше 0,2), то для практических целей достаточно ограничиться тремя-пятью членами этого ряда.

Пример 2.15. Найти значение $e^{\delta n}$, где $\delta=0{,}072$, $n=10$. Найдем значение e^δ, используя три, четыре, пять членов разложения (2.20):

$$e_3^{0{,}072}=1+0{,}072+\frac{0{,}072^2}{2}=1{,}074592;$$

$$e_4^{0{,}072}=1{,}074592+\frac{0{,}072^3}{2\cdot 3}=1{,}0746542;$$

$$e_5^{0{,}072}=1{,}0746542+\frac{0{,}072^4}{2\cdot 3\cdot 4}=1{,}0746553.$$

Нижний индекс у e^δ указывает на число суммируемых членов разложения. Используя последний результат, получим

$$e^{0{,}072\cdot 10}=1{,}0746553^{10}=2{,}0544324.$$

Продолжим пример. Пусть первоначальная сумма равна 1 млн.руб., тогда наращенная ее величина составит

$$S=1\cdot e^{0{,}072\cdot 10}=2{,}054 \text{ млн.руб.}$$ #15

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости. Последними можно воспользоваться при переходе от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Из равентства множителей наращения $(1+i)^n=e^{\delta n}$ следует

$$\delta=\ln(1+i), \tag{2.21}$$

$$i=e^\delta-1. \tag{2.22}$$

Более развернуто проблема эквивалентности процентных ставок, в том числе непрерывных, рассматривается в следующей главе.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок. Современную величину платежа, при условии, что дисконтирование осуществляется по непрерывным процентам, определим, решив уравнение (2.19) относительно P:

$$P=Se^{-\delta n}. \tag{2.23}$$

Величину $e^{-\delta}$ можно найти с любой степенью точности с помощью разложения в ряд

$$e^{-\delta}=1-\delta+\frac{\delta^2}{2!}-\frac{\delta^3}{3!}+\ \ldots$$

Дисконтирование с помощью непрерывной учетной ставки γ (силы дисконта) приводит к точно такому же результату, что и с помощью силы роста: $e^{-\delta n}=e^{-\gamma n}$. Иначе говоря, сила роста и сила дисконта одна и та же характеристика. Результат на первый взгляд несколько неожиданный. Однако, никакого парадокса здесь нет, имея в виду, что и та и другая непрерывная ставка применяется к бесконечно малым отрезкам времени.

Переменная сила роста. Как уже говорилось выше, сила роста — особый вид ставки процентов, играющий важную роль в теоретическом финансовом анализе. В частности, с помощью этой характеристики нетрудно моделировать процессы наращения денежных сумм с изменяющейся ставкой процентов. Остановимся на этой проблеме. Пусть сила роста описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta_t=f(t)$, тогда наращенная сумма находится как

$$S=Pe^{\int_0^n \delta_t\,dt}, \tag{2.24}$$

а современная величина платежа

$$P=Se^{-\int_0^n \delta_t\,dt}. \tag{2.25}$$

Величина δ_t может представлять собой любую возрастающую или убывающую функцию во времени, например линейную, геометричемкую прогрессию, экспоненту и т.д.

Ниже рассматриваются методы расчета множителя наращения и дисконтного множителя при условии, что сила роста дискретно изменяется во времени, представляет собой линейную функцию от времени и изменяется по геометрической прогрессии.

Если сила роста дискретно изменяется во времени и принимает значения δ_1, δ_2, ... , δ_k в интервалах n_1, n_2, ... , n_k, тогда за n_1 лет первоначальная сумма увеличится до $S_1=Pe^{\delta_1 n_1}$, за следующие n_2 лет произойдет дальнейший рост до $S_2=S_1e^{\delta_2 n_2}=Pe^{\delta_1 n_1+\delta_2 n_2}$ и т.д. В конце срока наращенная сумма составит

$$S=Pe^{\sum\delta_t n_t}, \; t=1, \ldots, k \tag{2.26}$$

Пусть общий срок наращения равен n, $n=\sum\limits_1^k n_t$, тогда средняя характеристика силы роста равна $\bar\delta=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_t\delta_t n_t$.

Отсюда

$$\bar\delta n=\sum_t\delta_t n_t$$

и, следовательно,

$$S=Pe^{\bar\delta n}. \tag{2.27}$$

Разумеется, эту задачу можно решить и на основе дискретных переменных ставок. В этом случае применима формула (2.3)

Пример 2.16. Предусматривается непрерывное начисление процентов на некоторую сумму ссуды, причем сила роста изменяется дискретно: первые два года проценты начисляются по ставке 8%, следующие три года — по 9%, далее в течение 5 лет — по 10%. Для определения множителя наращения находим:

$$\sum\delta_t n_t=0{,}08\cdot2+0{,}09\cdot3+1\cdot5=0{,}93.$$

Искомый множитель наращения $e^{0,93}=2{,}5345$.

#16

Пусть сила роста непрерывно измняется во времени по линейному закону $\delta_t=\delta_0+at$, где δ_0 — велчина силы роста для $t=0$, a — годовой прирост (он может быть как положительным, так и отрицательным), тогда

$$\int_0^n\delta_t dt=\int_0^n(\delta_0+at)dt=\delta_0 n+\frac{an^2}{2};$$

множитель наращения находится как

$$q=e^{\delta_0 n+an^2/2}. \tag{2.28}$$

Пример 2.17. Пусть начальное значение силы роста равно 8%, ежегодный абсолютный прирост 2%. Найти множитель наращения. В этих условиях $\delta_0=0{,}08$ и $a=0{,}02$. Если $n=5$, то

$$\delta_0 n+\frac{an^2}{2}=0{,}08\cdot5+\frac{0{,}02\cdot5^2}{2}=0{,}65;$$

искомый множитель равен $e^{0,65}=1{,}91554$. Допустим теперь, что происходит не рост, а линейное падение значения силы роста, $a=-0{,}02$, тогда степень множителя равна

$$0{,}08\cdot5-\frac{0{,}02\cdot5^2}{2}=0{,}15,$$

откуда

$$e^{0,15}=1{,}1618.$$

#17

Пусть сила роста изменяется по геометрической прогрессии $\delta_t=\delta_0 a^t$, где δ_0 — начальное значение процентной ставки (значение силы роста для $t=0$), a — знаменатель геометрической прогрессии (годовой коэффициент роста), тогда

$$\int_0^n\delta_t dt=\frac{\delta_0}{\ln a}\cdot(a^n-1),$$

а множитель наращения

$$q=e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n-1)}. \qquad (2.29)$$

Пример 2.18. Начальный уровень силы роста равен 8%. Предполагается, что процентная ставка ежегодно увеличивается на 20% ($a=1,2$), срок ссуды 5 лет. Множитель наращения в этом случае составит

$$q=e^{\frac{0,08}{\ln 1,2}(1,2^5-1)}=e^{0,653953}=1,921397. \qquad \#18$$

Закон изменения силы роста по геометрической прогрессии может быть задан и иначе, а именно в виде $\delta_t=\delta_0 e^{\gamma t}$, где γ — непрерывный темп измененения процентной ставки, тогда

$$\int_0^n \delta_t dt=\delta_0\int_0^n e^{\gamma t}dt=\frac{\delta_0}{\gamma}(e^{\gamma n}-1);$$

а множитель наращения

$$q=e^{(e^{\gamma n}-1)\cdot\delta_0/\gamma}. \qquad (2.30)$$

Этот множитель даст такой же результат, что и вычисленный по формуле (2.29) при условии, что $\gamma=\ln a$.

Формулы наращения по непрерывным процентам позволяют описать не только сложные финансовые, но и производственные процессы, с которыми можно встретиться в практической деятельности. Например, они применимы в анализе финансовых результатов инвестиций с изменяющейся их доходностью в связи с освоением мощностей, истощением месторождения и т.д. В этих случаях применение дискретных ставок, как правило, оказывается невозможным.

2.7 Определение срока платежа и процентных ставок

В ряде случаев, главным образом при разработке условий финансовых операций, сталкиваются с необходимостью решения обратных задач — определении продолжительности ссуды, числа периодов наращения, ставки процентов или учетной ставки. Для простых ставок эти задачи были рассмотрены в главе 1. Обратимся теперь к сложным и непрерывным процентам и решим уравнения, связывающие величины S и P, относительно интересующих нас величин.

Начнем с определения срока ссуды. Получим при наращении по сложной годовой ставке

$$n=\frac{\log S/P}{\log(1+i)}; \qquad (2.31)$$

при наращении по номинальной ставке процентов m раз в году

$$n=\frac{\log S/P}{\log(1+j/m)^m}; \qquad (2.32)$$

при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке

$$n=\frac{\log P/S}{\log(1-d_c)}; \qquad (2.33)$$

при дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году

$$n=\frac{\log P/S}{m\log(1-f/m)}; \qquad (2.34)$$

при наращении по постоянной ставке непрерывных процентов

$$n=\frac{\ln S/P}{\delta}; \qquad (2.35)$$

при наращении по изменяющейся ставке непрерывных процентов ($\delta_t=\delta_0 a^t$)

$$n=\ln\left(\frac{\ln a\cdot\ln S/P}{\delta_0}+1\right)/\ln a. \qquad (2.36)$$

Пример 2.19. За какой срок (в годах) сумма, равная 75 тыс. руб., достигнет 110 тыс.руб. при условии, что на нее начисляются проценты по ставке 7,5% раз в году и поквартально. По формулам (2.31) и (2.32) находим:

$$n=\frac{\log 110/75}{\log 1,075}=5,29 \text{ года};$$

$$n=\frac{\log 110/75}{\log(1+0,075/4)^4}=5,15 \text{ года}. \qquad \#19$$

Пример 2.20. Какой срок необходим для удвоения суммы при начислении изменяющейся с постоянным темпом ставки непрерывных процентов? Начальная ставка $\delta_0=0,1$, годовой темп роста 1,1. По условиям задачи $a=1,1$; $S/P=2$, откуда

$$n=\frac{\ln(\frac{\ln 1,1\cdot\ln 2}{0,1}+1)}{\ln 1,1}=5,32 \text{ года.} \qquad \#20$$

Значения процентных ставок находим, решив соответствующие формулы наращения или дисконтирования относительно искомых величин. Получим:

при наращении по сложной годовой ставке

$$i=(S/P)^{1/n}-1; \qquad (2.37)$$

при наращении по номинальной ставке процентов m раз в году

$$j=m((S/P)^{1/N}-1); \qquad N=mn; \qquad (2.38)$$

при дисконтировании по сложной годовой учетной ставке

$$d_c=1-(P/S)^{1/n}; \qquad (2.39)$$

при дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году

$$f=\frac{1}{m}(1-(P/S)^{1/N}); \qquad (2.40)$$

при наращении по постоянной ставке непрерывных процентов

$$\delta=\frac{\ln(S/P)}{n}; \qquad (2.41)$$

при наращении по изменяющейся ставке непрерывных процентов ($\delta_t=\delta_0 a^t$)

$$\delta_0=\frac{\ln a\cdot\ln S/P}{a^n-1}. \qquad (2.42)$$

Пример 2.21. В условиях выпуска сертификата Сберегательного банка СССР 1991г. (номинал 1000 руб.) предусмотрены выкупные суммы, зависящие от срока хранения. В частности, при пятилетнем сроке выплачивается 1415 руб., при десятилетнем 2595 руб. Каковы значения годовых сложных ставок процентов, дающих такое наращение? Находим

$$i=(1415/1000)^{1/5}-1=0,07189; \; i=(2595/1000)^{1/10}-1=0,1. \qquad \#21$$

Пример 2.22. Вексель выписан на срок 2 года. Какая должна быть сложная учетная ставка, чтобы при учете векселя владелец получил 90% от его суммы? По условию $P/S=0,9$, $n=2$, откуда согласно (2.39)

$$d_c=1-0,9^{1/2}=0,0513. \qquad \#22$$

Пример 2.23. Необходимо определить начальное значение силы роста, если сумма должна удвоиться за 5 лет, а годовой темп роста ставки (дискретный) установлен на уровне 1,1. По формуле (2.42) находим :

$$\delta_0=\frac{\ln 1,1\cdot\ln 2}{1,1^5-1}=0,10821. \qquad \#23$$

2.8. Наращение процентов и инфляция

В рассмотренных выше методах наращения процентов не учитывался такой важный момент, как инфляция. Все денежные величины измерялись по номиналу. Иными словами, не принималась во внимание реальная покупательная способность денег. Вместе с тем инфляционные процессы в современном мире заметно усилились и достигли в целом ряде стран небывалого уровня. Инфляция стала неотъемлемым элементом экономической действительности, с которым нельзя не считаться при проведении финансовых операций.

Учет инфляции необходим по крайней мере в двух случаях: при расчете наращенной суммы денег и определении действительной ставки процентов. Рассмотрим их. Прежде всего напомним, что падение покупательной способности денег за период характерезуется с помощью индекса J_n. Этот индекс равен обратной величине индекса цен J_p, т.е. $J_n=1/J_p$. Если наращенная за n лет сумма денег составляет величину S, а динамика цен характеризуется индексом J_p, то реальная наращенная сумма денег, т.е. с учетом их покупательной способности, рассчитывается как $C=S/J_p$. Допустим, что за два года цены выросли на 50%, тогда $J_p=1,5$. Соответственно, выплата 1000 руб. в этот момент равнозначна уплате

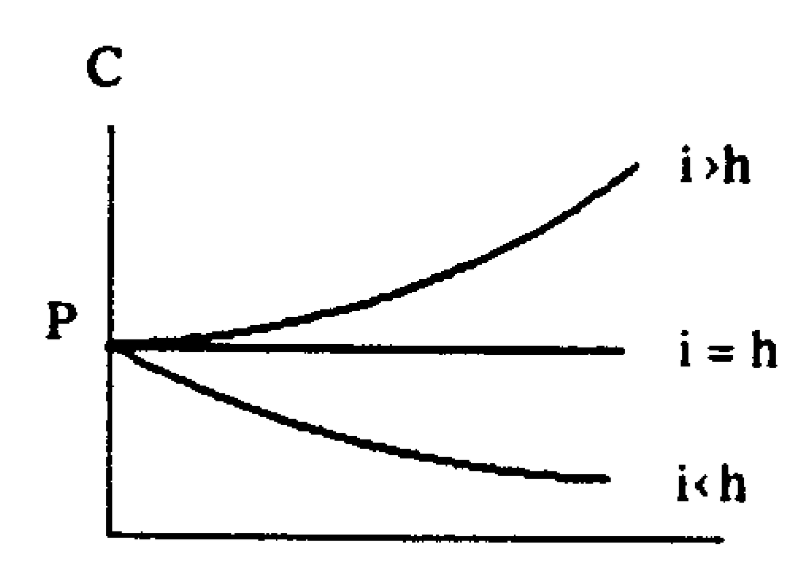

Рис. 2.3

$1000/1{,}5=666{,}67$ руб. в реальном измерении.

Пусть ожидаемый средний годовой темп инфляции (прирост цен) равен h. Тогда годовой индекс цен составит $1+h$. За n лет при сохранении предполагаемого темпа индекс цен будет равен $(1+h)^n$. В итоге наращенная сумма к концу этого срока с учетом ее обесценения в связи с инфляцией составит

$$C=P(1+i)^n(1+h)^{-n}=P\left(\frac{1+i}{1+h}\right)^n \qquad (2.43)$$

Величина $((1+i)/(1+h))^n$ представляет собой множитель наращения. Посмотрим теперь как влияют ставки i и темп инфляции h на значение этого множителя. Очевидно, что если темп инфляции равен ставке начисляемых процентов, то роста реальной суммы не произойдет: наращение будет поглощаться инфляцией, и, следовательно, $C=P$. Если же $h>i$, то произойдет «эрозия», проедание капитала, реальная сумма денег будет меньше первоначальной. Только в случае, когда $h<i$, будет наблюдаться некоторый рост реальной суммы (см. рис. 2.3).

Естественно, что владельцы денег не могут мириться с их обесценением в результате инфляции и предпринимают различные попытки компенсации потерь от снижения их покупательной способности. В практике обычно прибегают к двум методам. Наиболее распространенным является *индексация ставки процентов*, по которой производится наращение. Как правило, она сводится к увеличению ставки процентов на величину так называемой инфляционной премии. Назовем ставку с поправкой на инфляцию *брутто-ставкой*. Обозначим ее как r. Множитель наращения по брутто-ставке определяется на основе ставки i, которая не учитывает инфляцию, и поправочного множителя. Поскольку

$$1+r=(1+i)(1+h)^{-1},$$

то

$$r=i+h+ih. \qquad (2.44)$$

На практике брутто-ставки часто рассчитывают по формуле

$$r=i+h. \qquad (2.45)$$

Формула (2.44) по сравнению с (2.45) содержит дополнительный член ih. При незначительной величине i и h им, естественно, можно пренебречь. Если же они значительны, то ошибка (не в пользу владельца денег) может быть ощутимой. Например, уже при $i=0{,}05$ и $h=0{,}10$

«вклад» этого произведения в брутто-ставку процентов составляет 0,5%. Соответственно, брутто-ставка должна составлять не 15, а 15,5%. Если же принять в качестве брутто-ставки 15%, то при инфляции 10% получим, что множитель наращения за один год равен $1{,}15/1{,}1=1{,}0454$, т.е. меньше, чем заданный 1,05.

Другой метод компенсации инфляции сводится к *индексации первоначальной суммы платежа P*. В этом случае эта сумма периодически корректируется согласно движению определенного, заранее оговоренного индекса. Такой метод принят в Великобритании. По определению имеем $C=PJ_p(1+i)^n$. Если $J_p=(1+h)^{-n}$, то сразу приходим к формуле (2.43).

ГЛАВА 3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ КОНТРАКТА

3.1. Эквивалентность процентных ставок

Система эквивалентных ставок. Выше были охарактеризованы различные виды процентных ставок и особенности их применения при наращении и дисконтировании. Теперь посмотрим на начисление процентов под другим углом зрения. Пусть разнородные процентные ставки в конкретных условиях сделки приводят к одному и тому же финансовому результату. В этом случае они являются *эквивалентными* и для участвующих в сделке сторон в общем безразлично — какая из эквивалентных ставок будет фигурировать в соглашении. Принцип эквивалентности ставок лежит в основе многих методов количественного финансового анализа. В частности, он применяется при сравнении ставок, применяемых в различных сделках и соглашениях, определении эффективности финансово-кредитной операции, безубыточной замене одного вида процентных ставок (или метода их начисления) другим.

Проблему эквивалентности ставок мы уже затрагивали при обсуждении методов наращения процентов. В данной главе проблема эквивалентности ставок обсуждается в полном объеме. Здесь представлена развернутая система соотношений эквивалентности ставок, которая рассматривается в следующей последовательности: эквивалентность простых ставок, простых и сложных ставок, сложных ставок и, наконец, дискретных и непрерывных ставок. Вывод формул эквивалентности ставок во всех случаях основывается на равенстве взятых попарно соответствующих множителей наращения. Приведем несколько примеров. Для простых ставок процентов и учетных ставок, это равенство записывается как

$$1+ni_n=(1-nd)^{-1},$$

для простой учетной ставки и ставки сложных процентов оно имеет вид

$$(1-nd)^{-1}=(1+i)^n,$$

наконец, для простой ставки процентов и силы роста получим

$$1+ni=e^{\delta n}.$$

Равенство множителей наращения предполагает, что начальные и конечные результаты (т.е. P и S) финансовой операции при применении двух видов ставок идентичны.

Эквивалентность простой ставки процентов и учетной ставки. Напомним, что при применении простых процентных ставок необходимо установить временную базу (365 или 360 дней). Соответственно, эквивалентность простых ставок будем определять для двух условий — когда временные базы одинаковы и когда они различны. Если временные базы одинаковы, то из равенства множителей наращения следует

$$i=\frac{d}{1-nd}; \qquad d=\frac{i}{1+ni}, \qquad (3.1)\ (3.2)$$

где n — срок ссуды в годах. Напомним, что $n=\delta/K$.

Пример 3.1. Необходимо определить значение учетной ставки, эквивалентной простой ставке процентов, равной 10%.

Находим $d=\frac{0{,}1}{1+0{,}1}=0{,}0909$ или 9,091%. Таким образом, операция, в которой фигурирует учетная ставка 9,091% дает для годового периода такой же финансовый результат, что и простая ставка процентов, равная 10% годовых.

#1

Нетрудно обнаружить, что для одних и тех же условий ссуды $d<i$. При $n=1$ соотношения между эквивалентными ставками i и d характеризуются следующими величинами:

d, %	i, %	i, %	d, %
5	5,2632	5	4,7619
6	6,3830	6	5,6604
7	7,5269	7	6,5421
8	8,6956	8	7,4074
9	9,8901	9	8,2569
10	11,1111	10	9,0909

С уменьшением n различие между i и d становится менее ощутимым. Например, для d=10% эквивалентные значения i равны:

n, число лет	0,2	0,5	1	2	3	5
i, %	10,02	10,05	11,11	12,5	14,28	20,0

При измерении срока ссуды в днях получим следующие формулы эквивалентности ставок:

а) если временная база ставок одинакова и равна 360 дням, то

$$i=\frac{360d}{360-td};\qquad d=\frac{360i}{360+ti};\qquad (3.3)\ (3.4)$$

б) если временная база для ставки процентов 365 дней, а для учетной ставки — 360 дней, то

$$i=\frac{365d}{360-td};\qquad d=\frac{360i}{365+ti}.\qquad (3.5)\ (3.6)$$

Пример 3.2. Какова доходность измеренная в виде ставки простых процентов (K=365 дней) учета векселя по учетной ставке 10%? Срок уплаты по векселю — 250 дней. Находим

$$i=\frac{365\cdot 0,1}{360-250\cdot 0,1}=0,10896 \text{ или } 10.896\%.\qquad \#2$$

Пример 3.3. Операция учета должна принести 30% дохода (в расчете на год). Срок ссуды 55 дней. Если временная база простых процентов 365 дней, то необходимая учетная ставка (при K=360) составит

$$d=\frac{360\cdot 0,3}{365+55\cdot 0,3}=0,28309;\ 28,309\%.\qquad \#3$$

Эквивалентность простых и сложных процентных ставок. Речь здесь пойдет об эквивалентности ставок i_n и d сложным ставкам i, j, d_c. Начнем со ставок i_n и i. Из равенства множителей наращения следует

$$i_n=\frac{(1+i)^n-1}{n};\qquad i=(1+ni_n)^{1/n}-1.\qquad (3.7)\ (3.8)$$

Как следует из этих формул, эквивалентность ставок существенно зависит от срока начисления процентов.

Пример 3.4. Ссуда выдана под 20 сложных годовых процентов. Каков должен быть уровень простой ставки (K=365) при сроке: а) 10 лет, б) 8 месяцев ?

а) $$i_n=\frac{1,2^{10}-1}{10}=0,51917;\ 51,917\%.$$

б) $$i_n=\frac{1,2^{8/12}-1}{8/12}=0,19386;\ 19,386\%.\qquad \#4$$

Пример 3.5. Какой годовой ставкой сложных процентов можно заменить в контракте простую ставку 18%, не изменяя финансовых отношений сторон? Срок операции 580 дней. По формуле (3.8) находим

$$i=(1+\frac{580}{365}\cdot 0,18)^{365/580}-1=0,17153;\ 17,153\%.\qquad \#5$$

Если эквивалентная простой ставке сложная ставка начисляется раз в году, то

$$i=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{n};\qquad j=m((1+ni)^{1/mn}-1).\qquad (3.9)\ (3.10)$$

Теперь перейдем к эквивалентности простой учетной ставки и ставки сложных процентов. Из равенства соответствующих множителей наращения получим

$$i=(1-nd)^{-1/n}-1;\qquad d=\frac{1}{n}(1-(1+i)^{-n}).\qquad (3.11)\ (3.12)$$

Формулы (3.11) (3.12) предполагают, что при начислении процентов применяется одинаковая временная база. Если при применении учетной ставки используется K=360, то имеем

$$i=(1-d\frac{t}{360})^{-1/n}-1;\ d=\frac{360}{t}(1-(1+i)^{-n}),\qquad (3.13)\ (3.14)$$

где t — число дней ссуды.

Пусть сложные проценты начисляются m раз в году, тогда при равенстве временных баз начисления процентов

$$j=m(1-nd)^{-1/mn}-1;\qquad d=\frac{1}{n}(1-(1+j/m)^{-mn}).\qquad (3.15)\ (3.16)$$

Пример 3.6. Какова эффективность, выраженная в годовой сложной ставке, дисконтирования векселя по простой учетной ставке 8% (временная база 360)? Срок оплаты векселя наступт через 120 дней. Здесь n=120/365=0,32876, откуда по формуле (3.13) находим

$$i=(1-\frac{120}{360}\cdot 0,08)^{-1/0,32876}-1=0,08569 \text{ или } 8,569\%\qquad \#6$$

На эквивалентности простых процентных ставок и сложных учетных ставок останавливаться не будем, так как вряд ли соответствующие соотношения применяются на практике.

Эквивалентность сложных ставок. Начнем с эквивалентности номинальных и эффективных ставок. Этот вопрос был частично рассмотрен во второй главе при обсуждении проблемы начисления процентов m раз в году. Там была получена формула (2.8), позволяющая найти годовую ставку сложных процентов (эффективную ставку) по номинальной ставке. По-существу, найденная зависимость характеризует эквивалентность соответствующих процентных ставок (j и i). Зависимость номинальной ставки от эффективной определяется по формуле (2.9)

Пример 3.7. При разработке соглашения стороны договорились о том, что действительная доходность финансовой операции должна составить 9%, причем начисление процентов будет осуществляться помесячно. Номинальная ставка процентов в этом случае равна

$$j=12\cdot((1+0{,}09)^{1/12}-1)=0{,}0864879$$

Округление до $j=0{,}0865$ приведет к некоторому изменению эффективной ставки. По формуле (2.8) находим значение эквивалентной ставки i, оно составит 9,001%.

#7

Перейдем к эквивалентным сложным ставкам процентов и учетной ставке (i и d_c). Из равенства множителей наращения следует

$$i=\frac{d_c}{1-d_c}; \qquad d_c=\frac{i}{1+i}. \qquad (3.17)\ (3.18)$$

Заметим, что во всех приведенных ранее формулах эквивалентные ставки зависили от срока ссуды. Однако на эквивалентные ставки i и d_c величина n, как видим, не оказывает влияние.

Для рассматриваемых эквивалентных ставок легко получить ряд полезных зависимостей; ограничимся двумя из них:

$$v=1-d_c; \qquad i-d_c=id_c, \qquad (3.19)\ (3.20)$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

Обратимся теперь к начислению процентов m раз в году и определим эквивалентные ставки j и d_c.

Получим

$$j=m((1-d_c)^{-1/m}-1); \quad d_c=1-(1+j/m)^{-m}. \qquad (3.21)\ (3.22)$$

Эквивалентность непрерывных и дискретных ставок. Непрерывную процентную ставку (силу роста) теоретически можно сопоставить с любой дискретной процентной ставкой, сложной или простой, и получить исходя из равенства множителей наращения соответствующую эквивалентную ставку. Ограничимся несколькими соотношениями эквивалентности, которые, на наш взгляд, практически наиболее важны.

Эквивалентность силы роста годовой сложной ставке процентов была найдена выше: $\delta=\ln(1+i)$. В свою очередь, соотношение эквивалентности силы роста и номинальной ставки определяется как

$$\delta=m\ln(1+j/m). \qquad (3.23)$$

Зависимости эквивалентных сложных ставок от силы роста запишем в виде

$$i=e^{\delta}-1; \qquad j=m(e^{\delta/m}-1). \qquad (3.24)\ (3.25)$$

Если сила роста изменяется дискретно, линейно или с постоянным темпом, то эквивалентные ставки сложных годовых процентов можно расчитать по следующим формулам

$$i=e^{\bar{\delta}}-1; \qquad (3.26)$$

$$i=\left(e^{\delta_0 n+a n^2/2}\right)^{1/n}-1; \qquad (3.27)$$

$$i=\left(e^{\frac{\delta_0}{\ln a}\cdot(a^n-1)}\right)^{1/n}-1. \qquad (3.28)$$

Пример 3.8. В примере 2.16 множитель наращения при дискретно изменяющихся непрерывных процентах составил 2,5345. Эквивалентная годовая ставка сложных процентов для этих же условий согласно (3.26) равна:

$$i=\left(e^{0{,}93}\right)^{1/10}-1=0{,}0976.$$

#8

Приведем еще одно полезное соотношение эквивалентности. Определим дисконтный множитель v через эквивалентную силу роста

$$v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+e^{\delta}-1}=e^{-\delta}.$$

Рассмотрим теперь соотношение эквивалентности силы роста и учетных ставок. Для простой учетной ставки находим

$$\delta=\frac{-\ln(1-nd)}{n}; \qquad d=\frac{1-e^{-\delta}}{n}. \qquad (3.29)\ (3.30)$$

В свою очередь, для сложной учетной ставки

$$\delta=-\ln(1-d_c); \qquad d_c=1-e^{-\delta}. \qquad (3.31)\ (3.32)$$

Формулы эквивалентности дискретных и непрерывных ставок позволяют расширить область применения непрерывных процентов. Это связано с тем, что непрерывные проценты обладают одним несомненным преимуществом — в большинстве случаев с их помощью удается существенно упростить математические выкладки. Вместе с тем, после того как вывод получен, результат можно трансформировать, используя формулы перехода от непрерывных ставок к дискретным, и представить в виде, привычном для практиков. Остановимся кратко на одном примере, который при всей его простоте дает некоторое представление о существе дела. Во второй главе рассматривался случай, когда сила роста дискретно менялась по периодам. Формулы для расчета наращенной суммы свелись к простым выражениям, в которых в качестве аргумента фигурировали взвешенная сумма ставок или их средняя арифметическая, обобщающая все варианты этого показателя, меняющегося во времени. Если эту задачу решать на основе дискретных процентов, то никакой обобщающей формулы получить нельзя. Для ее решения следует шаг за шагом воспроизвести весь процесс наращения. Еще большие преимущества непрерывных процентов обнаруживаются при количественном анализе сложных взаимосвязанных производственных и финансовых процессов. Результаты такого анализа, если они требуют применения непрерывных ставок, можно трансформировать и представить в виде общепринятых характеристик эффективности — ставок сложных процентов.

3.2. Средние процентные ставки

Рассмотрим ситуации, когда процентные ставки изменяются во времени. Тогда эквивалентная им ставка представляет собой среднюю ставку, приносящую за определенный период тот же доход. Искомую среднюю ставку найдем на основе равенства соответствующих множителей наращения. Пусть за периоды n_1, n_2, ..., n_k начисляются простые проценты по ставкам i_1, i_2, ..., i_k. Тогда на основе равенства

$$1+Ni_o=1+\sum_{t=1}^{k} n_t i_t,$$

где $N=\sum n_t$, получим эквивалентную ставку

$$i_o=\frac{\sum n_t i_t}{N}.$$

Найденная характеристика представляет собой среднюю взвешенную арифметическую величину с весами, соответствующими продолжительности отдельных интервалов. Ставка i_o дает тот же доход за время N, что и совокупность изменяющихся ставок за соответствующие периоды. Аналогично для простых учетных ставок d_1, d_2, ..., d_k находим среднюю d_o

$$d_o=\frac{\sum n_t d_t}{N}. \qquad (3.33)$$

Пример 3.9. В контракте предусматривается начислить простые проценты в следующих размерах

период	i_t	n_t (в годах)	$n_t i_t$
1	0,10	0,5	0,05
2	0,12	1,0	0,12
3	0,15	0,5	0,075
		2,0	0,245

Найдем эквивалентную этим условиям ставку и наращенную сумму, при условии, что $P=10$ тыс. руб.

$$i_o=0{,}245/2{,}0=0{,}1225;\ 12{,}25\%.$$

$$S=10000\cdot(1+2\cdot0{,}1225)=12450 \text{ руб.}$$ #9

Перейдем к ставкам сложных процентов. Так, если начисление процентов производится на основе последовательных фиксированных ставок сложных процентов i_1, i_2, ..., i_k, которые начисляются в интервалах, равных $n_1, n_2, ..., n_k$ единиц времени, то из формулы (2.3) следует

$$i_o=\left((1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_k)^{n_k}\right)^{1/N}-1. \quad (3.34)$$

Полученное выражение представляет собой взвешенную среднюю геометрическую, в которой в качестве весов выступают продолжительности периодов начисления.

Пример 3.10. Найдем среднюю ставку для данных примера (2.3)

$$i_o=\left(1{,}09^2\cdot 1{,}0925^3\right)^{1/5}-1=0{,}091499, \text{ т.е. } 9{,}1499\%.$$

#10

Проблема определения средней ставки для непрерывных процентов уже была затронута в пункте 2.6. Напомним, что при дискретно изменяющейся во времени силе роста искомая средняя находится как средняя арифметическая взвешенная — см. (2.27).

3.3. Изменения условий контрактов

Финансовая эквивалентность обязательств. В практике нередко возникают случаи, когда необходимо заменить одно финансовое обязательство другим (например, с более отдаленным сроком платежа), объединить несколько обязательств в одно (консолидировать платежи) и т.п. В таких ситуациях неизбежно возникает вопрос о принципе, исходя из которого должны производиться изменения условий контрактов. Таким общепринятым принципом является *финансовая эквивалентность обязательства* (задолженности, платежей), которая предполагает неизменность (эквивалентность) финансовых отношений сторон до и после изменения условий, т.е. безубыточность для них подобных изменений. Эквивалентными считаются такие платежи, которые будучи «приведенными» по заданной процентной ставке к одному моменту времени оказываются равными. Приведение разновременно выплачиваемых сумм денег осуществляется путем их дисконтирования (приведения к более ранней дате) или, наоборот, наращивания, если эта дата относится к будущему. Если при изменении условий принцип финансовой эквивалентности не соблюдается, то одна из участвующих сторон терпит ущерб, размер которого можно заранее определить. По существу, принцип финансовой эквивалентности лежит в основе формул приращения и дисконтирования, связывающих величины P и S. Сумма P в начале периода равнозначна в этих формулах платежу S в

конце периода, при принятом уровне процентной ставки и методе начисления процентов. На принципе финансовой эквивалентности основывается сравнение разновременых платежей. Возьмем самый простой случай. Пусть имеются платежи S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, начало отсчета срока приходится на один день. Эти платежи эквивалентны, если их современные величины, рассчитанные по одной и той же ставке, равны. Замена S_1 на S_2 в этом случае формально не изменит финансовых отношений сторон.

Пример 3.11. Имеются два обязательства. Условия первого: $S_1=400$ тыс. руб., $n_1=4$ мес.; условия второго: $S_2=420$ тыс. руб., $n_2=9$ мес. Можно ли считать их равноценными? Если дисконтировать эти платежи на начало срока по ставке простых процентов $i=0{,}1$, получим

$$P_1=\frac{400}{1+4/12\cdot 0{,}1}=378{,}01 \text{ тыс. руб.},$$

$$P_2=\frac{420}{1+9/12\cdot 0{,}1}=390{,}7 \text{ тыс. руб.}$$

$P_1<P_2$, поэтому сравниваемые обязательства, строго говоря, неэквивалентны. К аналогичному выводу придем и тогда, когда платежи сравниваются по состоянию на другую дату, например, на момент выплаты по первому обязательству.

Продолжим пример. Допустим, что расчет современных величин осуществляется по ставке 5%. В этих условиях приходим к противоположному результату: $P_1>P_2$.

#11

Принцип эквивалентности обязательств лежит в основе многих финансовых расчетов долгосрочного и краткосрочного характера. Как уже говорилось, он применяется при различного рода изменениях условий контрактов: их объединении, замене, досрочном погашении или, наоборот, пролонгировании сроков платежей и т. д.

Общий метод решения подобных задач заключается в разработке так называемого *уравнения эквивалентности* (equation of value), в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени (focal date), приравнена сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов уравнение эквивалентности обычно разрабатывается на основе простых процентных ставок, для средне- и долгосрочных применяются сложные ставки.

Ниже рассмативаются две постановки задачи по изменению условий контрактов: консолидирование (объединение) задолженности и сбалансированное изменение сроков платежей.

Консолидирование задолженности. Пусть платежи S_1, S_2, ..., S_m имеют сроки n_1, n_2, ..., n_m, объединяются в один в сумме S_o и сроком n_o. Причем, если задается срок уплаты консолидированного платежа, то определяется S_o, и наоборот, если задана его величина, то находится n_o. При первой постановке задачи, строго говоря, можно обойтись без записи уравнения эквивалентности в явном виде. Так, если срок n_o больше, чем сроки объединяемых платежей n_j, то размер нового платежа равен сумме консолидируемых платежей, наращенных по принятой ставке на момент выплаты S_o. Итак, сумма консолидированного платежа при условии $n_0>n_1\ldots n_m$ составит

$$S_o=\sum_j S_j(1+t_ji), \qquad (3.3)$$

где t_j — временной интервал между сроками n_o и n_j, $t_j=n_o-n_j$.

Очевидно, что в методе определения суммы консолидированного платежа ничего не изменится, если ставки процентов в объединенных обязательствах будут различными, так как, по сути дела операция заключается в продлении обоих обязательств.

Пример 3.12. Два платежа — $S_1=100$ тыс. руб. и $S_2=50$ тыс. руб. со сроками 150 и 180 дней (отсчитываемыми от одной базы) заменяются одним со сроком 200 дней. Если стороны согласились на замену при использовании простой ставки, равной 6% годовых, то

$$S_0=100\cdot(1+\frac{50}{365}\cdot0{,}06)+50\cdot(1+\frac{20}{365}\cdot0{,}06)=150{,}86 \text{ тыс. руб.}$$

#12

В общем случае искомую величину S_o находим как сумму наращенных или дисконтированных платежей S_j :

$$S_o=\sum_j S_j(1+t_ji)+\sum_k S_k(1+t_ki)^{-1}, \qquad (3.36)$$

где S_j — суммы объединяемых платежей со сроками n_j, $n_j<n_o$; S_k — суммы объединяемых платежей со сроками n_k, $n_k>n_o$. Соответственно $t_j=n_o-n_j$; $t_k=n_k-n_o$.

Пример 3.13. Решено консолидировать 3 платежа со сроками 15.05, 15.06, 15.08, суммы платежей 10, 20, 15 тыс. руб. Срок консолидированного платежа — 01.08. По условиям задачи $S_1=10$, $S_2=20$, $S_3=15$, $t_1=78$, $t_2=47$, $t_3=14$ дней. При условии, что ставка простых процентов равна 8%, получим

$$S_o=10\cdot(1+\frac{78}{365}\cdot0{,}08)+20\cdot(1+\frac{47}{365}\cdot0{,}08)+15\cdot(1+\frac{14}{365}\cdot0{,}08)=45{,}331$$

тыс. руб. #13

Консолидировать платежи можно и на основе учетной ставки. Например, при консолидации векселей. В этом случае находим для $n_o>n_j$

$$S_o=\sum_j S_j(1-t_jd)^{-1}. \qquad (3.37)$$

В общем случае

$$S_o=\sum_j S_j(1-t_jd)^{-1}+\sum_k (1-t_kd). \qquad (3.38)$$

Пример 3.14. Два векселя со сроками 10.06 (10 тыс. руб.) и 01.08 (20 тыс. руб.) заменяются одним с продлением срока до 01.10. При объединении векселей применена учетная ставка 8%. Сроки пролонгации составят 113 и 61 день. Сумма нового векселя согласно (3.37) равна:

$$S_o=10\cdot(1-\frac{113}{360}\cdot0{,}08)^{-1}+20\cdot(1-\frac{61}{360}\cdot0{,}08)^{-1}=30{,}532 \text{ тыс.руб.}$$

#14

Заметим, что при применении уравнения эквивалентности, составленного на иную дату, чем день уплаты S_o, будет получен несколько иной результат. Отмеченная зависимость результата от выбора базовой даты объясняется тем, что, если $n=n_1+n_2$, то $(i+ni)\neq(1+n_1i)(1+n_2i)$. Различие, правда, столь незначительно, что им можно пренебречь.

Рассмотрим теперь ситуации, в которых консолидация производится на основе сложной ставки процентов. В этом случае вместо (3.35) и (3.36) получим соответственно

$$S_o=\sum S_j(1+i)^{t_j}; \qquad (3.39)$$

$$S_o=\sum S_j(1+i)^{t_j}+\sum S_k(1+i)^{-t_k}. \qquad (3.40)$$

Заметим, что выбор базовой даты при применении сложных процентов не влияет на результаты расчетов.

Пример 3.15. Для условий примера 3.12 при применении сложной годовой ставки получим

$$S_o=100\cdot 1{,}06^{50/365}+50\cdot 1{,}06^{20/365}=150{,}82 \text{ тыс. руб.} \qquad \#15$$

Обратимся теперь к задачам иного вида — к определению срока консолидированного платежа при заданной его сумме. Запишем уравнение эквивалентности на начальную дату

$$S_o(1+n_oi)^{-1}=\sum S_j(1+n_ji)^{-1}.$$

Для сокращения дальнейшей записим обозначим современную величину консолидированных платежей как P_o:

$$P_o=\sum S_j(1+n_ji)^{-1}.$$

Тогда

$$n_o=\frac{1}{i}\left(\frac{S_o}{P_o}-1\right). \qquad (3.41)$$

Очевидно, что решение может быть получено при условии $S_o>P_o$.

Пример 3.16. Платежи в размере 10, 20, 15 тыс. руб. уплачиваются через 50, 80, 150 дней после некоторой даты. Решено заменить их одним платежом, допустим, равным 50 тыс. руб. Естественно, что такое решение предполагает некоторую отсрочку. Найдем срок консолидированного платежа, при условии, что $i=10\%$. По условиям задачи

$$P_o=10\cdot(1+\frac{50}{365}\cdot 0{,}1)^{-1}+20\cdot(1+\frac{80}{365}\cdot 0.1)^{-1}+15\cdot(1+\frac{150}{365}\cdot 0{,}1)^{-1}=$$

$$= 46{,}19 \text{ тыс. руб.}$$

В итоге

$$n_o=\frac{1}{0{,}1}\cdot(\frac{50}{46{,}19}-1)=0{,}82485 \text{ года или 301 день} \qquad \#16$$

В практике имеют место случаи, когда размер консолидированного платежа равен сумме объединяемых обязательств, т.е. $S_o=\sum S_j$. Можно доказать, что в этом случае

$$n_o=\frac{\sum S_jn_j}{\sum S_j}. \qquad (3.42)$$

Таким образом, срок n_o не зависит от процентной ставки и равен средней арифметичемкой взвешенноой сроков объединяемых платежей. В качестве весов берутся суммы платежей.

Пример 3.17. В условиях примера 3.16 $S_o=\sum S_j=45$ тыс. руб. Получим

$$n_o=\frac{10\cdot\frac{50}{365}+20\cdot\frac{80}{365}+15\cdot\frac{150}{365}}{45}=0{,}26484 \text{ года или 97 дней.}$$

#17

Напишем теперь уравнение эквивалентности при применении простой учетной ставки:

$$S_o(1-nd)=\sum S_j(1-n_jd).$$

Откуда

$$n_o = \frac{1}{d}(S_o/V-1), \qquad (3.43)$$

где $V=\sum S_j(1-n_jd)$ — сумма современных величин консолидируемых платежей. Очевидно, что решение может быть получено при условии, что $S_o>V$.

В условиях, когда консолидация производится на основе сложных процентных ставок, получим

$$n_o=\frac{\ln(S_o/Q)}{\ln(1+i)}, \qquad (3.44)$$

где $Q=\sum S_j(1+i)^{-n_j}$ — сумма дисконтированных на начальную дату платежей. Заметим, что решение существует только при условии, когда $Q<S_o$.

В случаях, когда $S_o=\sum S_j$ можно применить следующую приближенную формулу

$$n_o \approx \sum \frac{S_j n_j}{S_o}. \qquad (3.45)$$

Эта формула дает результат, который всегда больше точного, причем, чем ниже значение i, тем меньше расхождение между точной и приближенной величиной срока.

Пример 3.18. Пусть, как и выше, $S_1=10$, $S_2=20$, $S_3=15$ тыс. руб. Сроки этих платежей 2, 3, 5 лет. Тогда при условии, что $i=10\%$ сложных и сумма консолидированного платежа равна 45 тыс. руб., находим

$$Q=10\cdot 1{,}1^{-2}+20\cdot 1{,}1^{-3}+15\cdot 1{,}1^{-5}=33{,}34,$$

$$n_o=\frac{\ln(45/33{,}34)}{\ln 1{,}1}=3{,}146 \text{ года.}$$

По приближенной формуле (3.45) находим $n \approx 3{,}444$ года. Увеличение S_o, естественно, приводит к увеличению срока n_o. Например, пусть $S_o=50$ тыс. руб., соответственно $n_o \approx 4{,}313$ года.

#18

3.4. Общий случай изменения условий контракта

Перейдем теперь к более общим случаям изменения условий контрактов, в которых решения нельзя получить простым суммированием наращенных и дисконтированных платежей и, следовательно, нет готовых формул. Расчет искомой суммы S_o осуществляется на основе уравнения эквивалентности, в котором сумма приведенных платежей по старым условиям контракта равна сумме приведенных на тот же момент времени платежей по новому (измененному) соглашению. Если приведение осуществляется на начальный момент времени, то уравнение эквивалентности в общем виде записывается как

$$\sum S_q v^{n_q}=\sum S_k v^{n_k}, \qquad (3.46)$$

где S_k — ряд заменяемых платежей со сроками n_k; S_q — платежи со сроками n_q, предусматриваемые новыми условиями, v — дисконтный множитель. Конкретный вид этого уравнения определяется содержанием контрактов, поэтому методику разработки уравнения эквивалентности удобнее показать на примерах. Для иллюстрации сказанного

приведем три примера, в двух первых для дисконтирования применяются простые ставки, в третьем — сложные.

Пример 3.19. Два обязательства в сумме 100 тыс. руб. и 50 тыс. руб. должны быть погашены соответственно 1.11 и 1.01 следующего года. Стороны согласились пересмотреть условия: должник 1.12 уплачивает 60 тыс. руб. Остальной долг гасится 1.03. Необходимо найти сумму нового платежа S_o при условии, что стороны согласились применить в расчетах простую ставку, равную 6%.

Возьмем за базовую дату, скажем, 1.01, тогда уравнение эквивалентности запишем следующим образом:

$$100\cdot(1+\frac{61}{365}\cdot 0{,}06)+50=60\cdot(1+\frac{31}{365}\cdot 0{,}06)+S_0(1+\frac{59}{365}\cdot 0{,}06).$$

В этом случае $S_0=91{,}58$ тыс. руб. Если же принять в качестве базовой иную дату, например 1.03, то уравнение эквивалентности примет вид

$$100\cdot(1+\frac{120}{365}\cdot 0{,}06)+50\cdot(1+\frac{59}{365}\cdot 0{,}06)=60\cdot(1+\frac{90}{365}\cdot 0{,}06)+S_0.$$

Откуда $S_0=91{,}57$ тыс. руб. Ответ,как видим, чуть отличается от предыдущего. (Причины расхождения в ответах при изменении базовой даты обсуждался выше).

#19

Пример 3.20. Имеется обязательство уплатить 100 тыс. руб. через 4 месяца и 70 тыс. руб. через 8 месяцев после некоторого момента времени. По новому обязательству необходимо плату произвести равными суммами (S_0) через 3 и 6 месяцев после этого момента. При расчете применяется ставка, равная 6% в год. Задача заключается в определении суммы S_0. Напишем уравнение эквивалентности. В качестве базовой даты возьмем, допустим, конец третьего месяца. Тогда, при условии, что начисляются обыкновенные поценты ($K=360$), получим

$$\frac{100}{1+(1/12)\cdot 0{,}06}+\frac{70}{1+(5/12)\cdot 0{,}06}=S_0+\frac{S_0}{(1+\frac{3}{12}\cdot 0{,}06)},$$

откуда

$$167{,}795=S_0+\frac{S_0}{1{,}015} \text{ и } S_0=84{,}522 \text{ тыс. руб.}$$

#20

3—354

Пример 3.21. Допустим, существует обязательство произвести платеж через 5 лет, первоначальная сумма долга $P=100$ тыс. руб., процент начисляется ежегодно по ставке i. Стороны согласились пересмотреть соглашение. Обязательство будет погашено следующим образом: через 2 года производится выплата 30 тыс. руб., а остальной долг гасится через 4 года. Необходимо определить сумму окончательного платежа.

Ответ на поставленный вопрос получим, составив и решив соответствующее уравнение эквивалентности платежей. В качестве момента, на который приводятся платежи, удобно принять: а) начало срока обязательства; б) момент уплаты 30 тыс. руб.; в) момент платежа по старому обязательству; г) конец срока нового обязательства. Пусть в качестве момента времени приведения платежей взято начало срока обязательства. Тогда уравнение эквивалентности запишем как

а) $100=30v^2+Sv^6$,

где S — искомый размер платежа. В левой части этого уравнения находится современная величина старого обязательства ($P=100$), в правой — сумма современных величин платежей по новому обязательству. Решим уравнение относительно S при условии, что $i=0{,}05$:

$$S=\frac{100-30\cdot 1{,}05^{-2}}{1{,}05^{-6}}=97{,}544 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично можно составить уравнения эквивалентности платежей и на другие моменты времени. Так, взяв за базу конец второго года (момент уплаты 30 тыс. руб.), получим следующее уравнение:

б) $100\cdot(1+i)^2=30+Sv^4$.

Решение уравнения относительно S, естественно, даст тот же ответ. Наконец, напишем уравнения эквивалентности для двух оставшихся моментов времени:

в) $100\cdot(1+i)^5=30\cdot(1+i)^3+Sv$;

г) $100\cdot(1+i)^6=30\cdot(1+i)^4+S$.

Любое из четырех приведенных уравнений легко получить из другого. Например, если уравнение (г) умножить на v^4, то получим уравнение (б).

#21.

РАЗДЕЛ II. АНАЛИЗ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

ГЛАВА 4. ПОСТОЯННЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

4.1. Потоки платежей и финансовые ренты

Контракты, сделки, коммерческие и производственно-хозяйственные операции часто предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Например, получение и погашение долгосрочного кредита, погашение различных видов задолженности, денежные показатели инвестиционного процесса и т. д. можно представить в виде последовательности (ряда) выплат и поступлений. В финансовой зарубежной литературе отдельные элементы такого ряда, а иногда и сам ряд платежей в целом, называют *потоком платежей* (cash flows). Ниже этот термин будем употреблять для всего ряда распределенных во времени платежей. Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными (выплаты) величинами.

Поток платежей, все члены которого — положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой* или *аннуитетом* (annuity) вне зависимости от происхождения этих платежей, их назначения и целей. Например, рентой является ряд, состоящий из выплат процентов по облигации, взносы по погашению потребительского кредита, выплаты стаховых премий и т. д. Во всех приведенных примерах некоторые суммы денег выплачиваются через равные интервалы времени. Представление последовательности платежей в виде финансовой ренты существенно упрощает количественный анализ, дает возможность использовать набор стандартных формул и табличные значения ряда коэффициентов, содержащихся в этих формулах.

Финансовая рента (или, кратко, рента) описывается следующими параметрами: *член ренты* (rent) — величина кажого отдельного платежа, *период ренты* (rent period) — временной интервал между двумя платежами, *срок ренты* — время, измеренное от начала финансовой ренты до конца последнего ее периода, *процентная ставка* — ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, из которых состоит рента. При характеристике отдельных видов финансовых рент применяются дополнительные параметры: число платежей в году, число начислений процентов, моменты производства платжей и др.

Виды финансовых рент. В практике применяются разнообразные по условиям формирования ренты. В основу их классификации могут быть положены различные признаки. В зависимости от продолжительности периода ренты делят на годовые и p-срочные (p характеризует число выплат на протяжении года). В анализе инвестиционного процесса иногда применяются ренты с периодом выплат, превышающим год. Все перечисленные виды рент называют *дискретными*. В финансово-экономическом анализе встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются *непрерывными* рентами.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением процентов один раз в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут совпадать с моментами выплаты членов ренты, но это необязательно.

По величине членов различают ренты *постоянные* (с равными членами) и *переменные*. Члены переменных рент могут изменяться во времени, следуя какому-либо закону, например арифметической или геометрической прогрессии и т. д., или несистематично.

По вероятности выплаты членов ренты делятся на *верные* (anuity certain) и *условные* (contingent annuity). Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты становится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. К такого рода рентам относятся различного рода платежи по личному страхованию, в частности, выплата пенсий — число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты *с конечным числом членов*, или *ограниченые*, и *бесконечные*, или *вечные*. Вечная рента не является абстракцией, на практике иногда сталкиваются с такого рода случаями. Например, с вечной рентой встречаются в ряде долгосрочных финансовых расчетов, когда предполагется, что период функционирования соответствующей производственно-хозяйственной системы или срок финансовой операции и т. д. весьма продолжителен и не оговаривается какими-либо конкретными сроками. В качестве вечной ренты можно рассматривать и выплаты по облигационным займам с неограниченными сроками.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо фиксированного момента времени (начало действия контракта, время оценки ренты и т. д.) ренты делятся на *немедленные* и *отложенные*, или *отсроченные* (defferred annuity). Срок немедленных рент начинается сразу, т. е. оба указанных момента времени совпадают. У отложенных рент начало срока запаздывает относительно этого момента.

Очень важным является различие рент по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце периода, как это чаще всего

и бывает, то такие ренты называются *обычными* или *постумерандо* (ordinary annuity), если же выплата производится в начале каждого периода, то соответствующие ренты называются *пренумерандо* (annuity due). На практике чаще всего встречаются обычные ренты. Иногда контракты предусматривают платежи в середине каждого периода, например, в анализе производственных инвестиций.

Приведем пример. Периодическое равномерное погашение по полугодиям кредита с фиксированным сроком погашения и полугодовым начислением процентов, есть полугодовая верная временная рента. Если первый платеж по этой ренте будет произведен в какой-то момент в будущем, скажем, через два года, то это рента отложенная.

Обобщающие характеристики потоков платежей. В подавляющем числе практических случаев количественный финансово-экономический анализ потоков платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих эти потоки характеристик: наращенной суммы и современной величины. Названные показатели представляют собой обобщения потока платежей за весь срок с учетом моментов времени, когда они выплачивались, в виде одного числа.

Наращенная сумма (amount of an annuity) — сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу его срока. Под *современной величиной* (present value) потока платежей понимают сумму всех его членов, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его. Конкретный смысл наращенной суммы и современной величины потока платежей (в том числе финансовой ренты) определяется содержанием его членов или их происхождением. Наращенная сумма может представлять собой общую сумму задолженности, итоговый обьем инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв и т. д. Современная величина потока платежей характеризует приведенные издержки, капитализированный доход, чистую приведенную прибыль и т. д. Обобщающие ренту показатели широко применяются в различных финансовых расчетах и методических разработках. Так, на основе упомянутых выше характеристик разрабатываются планы погашения задолженности, сравниваются или безубыточно изменяются условия контрактов, оценивается степень эффективности инвестиций и т. п.

В данной главе анализируются ограниченные финансовые ренты, члены которых не изменяются во времени (постоянные ренты), платежи производятся раз, p раз в году или через r лет в конце соответствующих периодов, а проценты начисляются один, m раз в году или непрерывно. В гл. 5 рассматриваются методы количественного анализа всех других видов потоков платежей.

4.2. Наращенная сумма обычной ренты

Годовая рента. Обсуждения методов наращения начнем с наиболее простого случая — годовой ренты. Пусть в конце каждого года в течение 4-лет в банк вносится по 1 000 руб., проценты начисляются в конце года, ставка — 5% годовых. В этом случае первый взнос обратится к концу срока ренты в величину $1\,000\cdot1{,}05^3$, так как соответствующая сумма была на счете в течение 3 лет, второй взнос увеличится до $1\,000\cdot1{,}05^2$, так как был на счете 2 года. Последний взнос процентов не приносит. Таким образом, в конце срока ренты взносы с начисленными на них процентами представляют ряд чисел: $1\,000\cdot1{,}05^3$, $1\,000\cdot1{,}05^2$, $1\,000\cdot1{,}05$, $1\,000$. Наращенная к концу срока ренты величина будет равна сумме членов этого ряда. Обобщим сказанное, выведя соответствующую формулу для наращенной суммы годовой ренты. Введем обозначения: S — наращенная сумма ренты; R — размер члена ренты; i — ставка процентов (десятичная дробь); n — срок ренты (число лет).

Члены ренты будут приносить проценты в течение n-1, n-2, . . . 2, 1 и 0 лет, а наращенная величина членов ренты составит $R(1+i)^{n-1}$, $R(1+i)^{n-2}$, ..., $R(1+i)$, R. Перепишем этот ряд в обратном порядке. Нетрудно убедиться, что он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)$ и первым членом R. Найдем сумму членов прогрессии. Получим:

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (4.1)$$

Обозначим множитель, на который умножается R через $s_{n;i}$, где индекс $n;i$ указывает на продолжительность ренты и примененную ставку процентов. В дальнейшем будем называть его *коэффициентом наращения ренты.* Этот коэффициент представляет собой наращенную сумму ренты, член которой равен 1:

$$s_{n;i}=\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t=\frac{(1+i)^n-1}{i}. \qquad (4.2)$$

Формулу (4.1) теперь можно записать как

$$S_{n;i}=R\cdot s_{n;i}. \qquad (4.3)$$

Значения $s_{n;i}$ табулированы — см. Приложение 4.

Пример 4.1 Создается фонд, взносы производятся на протяжении 10 лет раз в конце года по 40 тыс. руб. На собранные средства начисляются проценты по ставке 10% годовых. Необходимо найти размер фонда к концу срока. Для получения ответа воспользуемся формулой (4.3):

$$S=40\,000\cdot s_{10;10}.$$

Табличное значение коэффициента наращения $s_{10;10}$ равно 15,9374246, соответственно $S=40\cdot15{,}93742460=637496{,}98$ руб.

Пусть теперь ставка равна 12%. Непосредственно по формуле (4.1) получим:

$$S=40000\cdot\frac{1{,}12^{10}-1}{0{,}12}=701949{,}40 \text{ руб.} \qquad \#1$$

Коэффициент $s_{n;i}$ зависит от двух параметров — n и i. С ростом каждого из них значение $s_{n;i}$ увеличивается — см. рис. 4.1. Как следует из (4.2) при $i=0$, $s_{n;i}=n$ и, следовательно, $S=Rn$.

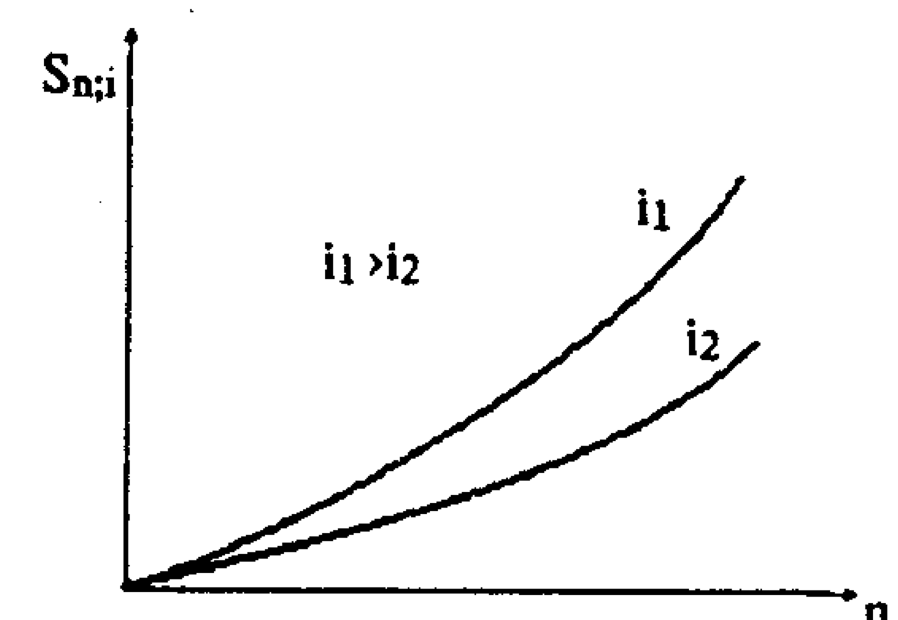

Рис. 4.1

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Выше значение S определялось при условии, что процент начисляется один раз в конце года. Рассмотрим теперь случай когда проценты начисляются m раз в году, следовательно, каждый раз применяется ставка равная j/m (напомним, что j обозначает номинальную ставку процентов). Как и выше, члены ренты с начисленными процентами образуют некоторый ряд. На последний взнос проценты не начисляются; на предпоследний взнос начисляются проценты, соотвующий множитель равен $(1+j/m)^m$ и т. д. Перепишем члены ренты с начисленными процентами в обратном порядке. Получим ряд R, $R(1+j/m)^m$, $R(1+j/m)^{m2}$, ..., $R(1+j/m)^{m(n-2)}$, $R(1+j/m)^{m(n-1)}$. Нетрудно убедиться, что и в этом случае мы имеем дело с возрастающей геометрической прогрессией. Превый член ее равен R, а знаменатель — $(1+j/m)^m$. Сумма членов этой прогрессии будет равна

$$S=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}. \tag{4.4}$$

Пример 4.2. Найти наращенную сумму ренты при условии, что проценты начисляются поквартально (остальные условия из предыдущего примера). В этом случае $m=4$, $mn=40$, $j/m=0{,}12/4=0{,}03$.

По формуле (4.4) получим

$$S=40\ 000\cdot\frac{1{,}03^{40}-1}{1{,}03^4-1}=40\ 000\cdot 18{,}0229403=720\ 917{,}61.$$

Как видим, переход от годового начисления процентов к поквартальному заметно увеличил наращенную сумму. #2

Множитель, на который умножается R в формуле (4.4) отличается от $s_{n;i}$. Для того, чтобы и в этом случае можно было воспользоваться таблицами значений $s_{n;i}$, умножим и разделим (4.4) на j/m, получим

$$s_{mn;j/m}=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1}=\frac{s_{mn;j/m}}{s_{m;j/m}}, \tag{4.5}$$

где

$$s_{mn;j/m}=\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}, \tag{4.6}$$

$$s_{m;j/m}=\frac{(1+j/m)^{m}-1}{j/m}. \tag{4.7}$$

Пример 4.3. Для данных примера 4.2 найдем табличные значения необходимого коэффициента как

$$\frac{s_{40;3}}{s_{4;3}}=\frac{75{,}40125973}{4{,}183627}=18{,}0229403.$$ #3

Рента p-срочная ($m=1$). Определим теперь наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в год равными платежами, а процент начисляется один раз в конце года. Если годовая сумма платежа R, то каждый раз выплачивается R/p. Не будем теперь выписывать последовательность платежей с наращенными процентами, как это было выше. Как и там этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию. Ее первый член R/p и знаменатель $(1+i)^{1/p}$. Общее число членов ряда равно np. Теперь сразу можно написать формулу коэффициента наращенной суммы:

$$s_{n;i}^{(p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{(1+i)^{1/p\cdot np}-1}{(1+i)^{1/p}-1}=\frac{(1+i)^n-1}{p((1+i)^{1/p}-1)}. \tag{4.8}$$

Наращенная сумма составит

$$S=Rs_{n;i}^{(p)}. \tag{4.9}$$

Рента p-срочная ($p=m$). С наиболее простым случаем p-срочной ренты сталкиваются тогда, когда число членов ренты в году равно числу начислений процентов в течение года, т. е. $p=m$. Как и выше, предполагаем, что проценты начисляются в конце периодов ренты. Здесь можно воспользоваться формулой (4.1), в которой i заменяется на j/m, а вместо числа лет n берется общее число периодов ренты, равное mn, причем член ренты теперь равен R/m. Таким образом,

$$S=\frac{R}{m}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}=\frac{R}{m}s_{mn;j/m}. \tag{4.10}$$

Рента p-срочная ($p\neq m$). Найдем формулу для расчета наращенной суммы в самом общем случае p-срочной ренты с начислением процентов m раз в год. Рента с такими условиями называется *общей*. Первый член ренты, равный R/p, уплаченный спустя $1/p$ года после начала с начисленными на него процентами к концу срока ренты будет равен $\frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-m/p}$, второй член составит величину $\frac{R}{p}(1+j/m)^{mn-2m/p}$. Очевидно, что полученные величины (записанные в обратном порядке) следуют возрастающей геометрической прогрессии с первым членом R/p, знаменателем $(1+j/m)^{m/p}$ и числом членов np. Их сумма составляет величину

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{m/p\cdot np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}. \tag{4.11}$$

Разделим числитель и знаменатель формулы (4.11) на j/m

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}\cdot\frac{j/m}{(1+j/m)^{m/p}-1}.$$

Второй сомножитель этого равенства соответствует $s_{mn;j/m}$. В случае, когда m/p — целое число, третий множитель представить как $\frac{1}{s_{m/p;j/m}}$. В итоге формулу (4.11) можно записать в компактном виде как

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{s_{mn;j/m}}{s_{m/p;j/m}} \qquad (4.12)$$

и, следовательно, при расчете использовать табличные значения коэффициентов наращения ренты.

Пример 4.4. Для создания резервного фонда ежегодно выделяется по 4 тыс. руб. На аккумулируемы средства начисляются сложные проценты по ставке 6%. Необходимо определить общую сумму фонда через 5 лет для следующих вариантов поступления средств и начисления процентов: а) поступление в конце года, начисление процентов по полугодиям; б) поступление в конце квартала, начисление процентов по полугодиям; в) квартальное поступление и начисление процентов.

По условиям задачи $R=4\ 000$, $n=5$, $i=j=0{,}06$.

а) здесь $m=2$, $j/m=0{,}03$. Значения коэффициентов наращения: $s_{10;3}=11{,}463879$; $s_{2;3}=2{,}03$. По формуле (4.5) получим:

$$S=4\ 000\cdot\frac{11{,}463879}{2{,}03}=22\ 588{,}92 \text{ руб.};$$

б) в этом варианте $p=4$, $m=2$, $j/m=0{,}03$. Поскольку $m/p<1$, то табличные значения коэффициентов наращения получить нельзя. По формуле (4.11) находим:

$$S=4\ 000\cdot\frac{1{,}03^{10}-1}{4\cdot(1{,}03^{2/4}-1)}=23\ 098{,}45 \text{ руб.};$$

в) здесь по условию $p=m=4$, $j/m=0{,}015$. Табличное значение коэффициента $s_{20;1,5}=23{,}123667$, откуда по формуле (4.10) получим:

$$S=4\ 000\cdot\frac{23{,}123667}{4}=23\ 123{,}67 \text{ руб.}$$

#4

Непрерывное начисление процентов. Пусть поток платежей будет дискретным, как и во всех рассмотренных выше случаях, однако проценты на члены потока начисляются непрерывно. Перепишем в обратном порядке последовательность платежей с начисленными процентами: R, Re^{δ}, $Re^{2\delta}$, ... ,$Re^{\delta(n-1)}$. Отсюда сразу можно записать

$$S=Rs_{n;\delta}; \qquad (4.13)$$

где коэффициент наращения

$$s_{n;\delta}=\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}. \qquad (4.14)$$

Аналогично для p-срочной ренты находим

$$S=Rs^{(p)}_{n;\delta}, \qquad (4.15)$$

где коэффициент наращения

$$s^{(p)}_{n;\delta}=\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\delta/p}-1)}. \qquad (4.16)$$

Наращенная сумма ренты при непрерывном начислении процентов по ставке δ равна аналогичной характеристике при дискретном начислении процентов по ставке $i(j)$, если δ определено по формулам (2.21), (3.23), характеризующим взаимосвязь δ и $i(j)$.

Пример 4.5. Условия контракта предусматривают ежегодные выплаты в сумме 40 тыс. руб. в течение 5 лет. Необходимо определить накопленную к концу срока сумму при непрерывном начислении процентов по ставке δ, равной 6%, при условии, что выплаты производятся: а) раз в конце года; б) по полугодиям; в) поквартально.

По данным задачи имеем ренты с условиями $R=40$; $n=5$; $\delta=0{,}06$ и $p=1{,}2$ и 4. Коэффициенты наращения для этих рент: $s_{5;6}$, $s^{(2)}_{5;6}$ и $s^{(4)}_{5;6}$. По формуле (4.14) находим

$$\text{а) } s_{5;6}=\frac{e^{0{,}06\cdot 5}-1}{e^{0{,}06}-1}=5{,}6578$$

и по формуле (4.16)

б) $s_{5;6}^{(2)}=\dfrac{e^{0,06\cdot 5}-1}{2(e^{0,06/2}-1)}=5,7439;$

в) $s_{5;6}^{(4)}=\dfrac{e^{0,06\cdot 5}-1}{4(e^{0,06/4}-1)}=5,7874.$

Для соответствующих условий выплат получим $S_а=226,31$; $S_б=229,76$ и $S_в=231,49$ тыс. руб. Несколько изменим условия. Пусть теперь проценты начисляются непрерывно, но ставка процентов δ непосредственно не задается. Она определяется исходя из дискретной ставки 6% годовых. Тогда $\delta=\ln 1,06=0,05826889$ и $s_{5;5,82689}=5,63709$; $s_{5;5,82689}^{(2)}=5,72042$; $s_{5;5,82689}^{(4)}=5,76239$. В итоге имеем: $S_а=223,31$; $S_б=228,82$; $S_в=230,49$ тыс. руб. При дискретном начислении процентов по ставке $i=6\%$ получим аналогичные суммы.

#5

Сравнение результатов наращения обычных годовых и р-срочных рент с разными условиями. Как это видно из примера 4.4, условия производства платежей и начисления процентов (их частота) заметно влияют на размер наращенной суммы. Ниже приведены соотношения наращенных сумм соответствующих финансовых рент. При сравнении наращенные суммы обозначены как $S(p,m)$, а именно: $S(1;1)$ — годовой ренты с начислением процентов в конце года; $S(1;m)$ — годовой ренты с начислением процентов m раз в году; $S(p;\infty)$ — p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов. Для одних и тех же сумм годовых выплат продолжительности ренты и процентных ставок $(i=j=\delta)$ получим соотношения:

$$S(1;1)<\underset{m>1}{S(1;m)}<S(1;\infty)<\underset{p>1}{S(p;1)}<\underset{p>m>1}{S(p;m)}<\underset{p=m>1}{S(p;m)}<\underset{1<p<m}{S(p;m)}<S(p;\infty).$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при разработке условий контрактов, так как позволяют заранее сравнить их конечные результаты. Например,можно сразу установить, что рента с условиями $p=2$ и $m=4$ дает меньшую наращенную сумму, чем с $p=4$ и $m=2$, при равенстве всех прочих условий.

Для рент, у которых сумма платежей за год равна 10 тыс. руб., а срок 10 лет, процентная ставка 6%, получим следующие значения наращенных сумм:

	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=12$	$m=\infty$
$p=1$	131,81	132,37	132,65	132,85	132,95
$p=4$	134,74	135,35	135,67	135,88	135,99

4.3. Современная величина обычной ренты

Годовая рента. Под *современной величиной потока платежей*, в том числе финансовой ренты, будем понимать сумму всех дисконтированных членов такого потока на предшествующий ему момент. Вместо современной величины иногда говорят *капитализированная* или *приведенная величина (стоимость) потока*. Как будет показано ниже, современная величина эквивалентна в финансовом смысле всем платежам, которые охватываются потоком. Этот показатель находит широкое практическое применение в расчетах по погашению долгосрочных займов, оценке и сравнении различного рода финансовых обязательств и поступлений средств, эффективности инвестиций, расчетов по страхованию и т. д. Не будет преувеличением утверждение о том, что современная величина потока платежей является важнейшим показателем, которым оперируют в количественном финансовом анализе. Без основательного понимания сущности этой характеристики и методов ее измерения, строго говоря, нельзя разобраться в таких важных для практики проблемах как измерение эффективности финансово-кредитных операций, в том числе — инвестиций, сравнение условий контрактов и т. д. Решение широкого спектра финансовых и коммерческих проблем так или иначе связано с определением современной величины потока поступлений денежных средств.

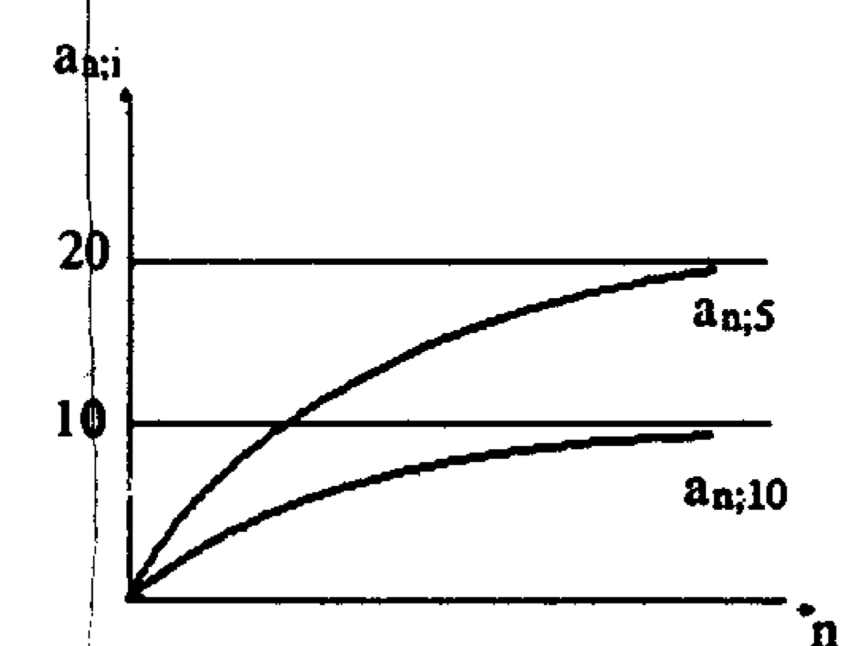

Рис. 4.2

Методы определения современных величин рент рассмотрим в том же порядке, что и методы наращения. Начнем с простого случая — годовой обычной ренты, член которой равен 1, процентная ставка — i, проценты начисляются в конце периода ренты, срок ренты — n лет. Рента немедленная, т. е. момент оценки современной величины совпадает с началом ренты. В этих условиях дисконтрованная величина первого платежа равна, очевидно, v, второго — v^2 и т. д. В целом дисконтированные платежи, каждый из которых равен 1, образуют ряд v, v^2, ..., v^n, представляющий собой геометрическую прогрессию с первым членом и знаменателем, равными v, с числом членов n.

Найдем сумму членов этой прогрессии. Обозначим ее как $a_{n;i}$. Очевидно, что

$$a_{n;i}=\sum_{t=1}^{n}v^t=\frac{v(v^n-1)}{v-1}=\frac{1-v^n}{i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (4.17)$$

Назовем величину $a_{n;i}$ *коэффициентом приведения ренты.* Этот коэффициент показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее члена. Значения $a_{n;i}$ зависят только от ставки процентов и числа членов ренты, они табулированы для широкого набора значений n и i (см. Приложение 5).

Так как $a_{n;i}$ характеризует современную величину ренты, члены которой равны 1, то для ренты с членами, равными R, современная величина (обозначим ее через A) будет в R раз больше:

$$A=Ra_{n;i}. \qquad (4.18)$$

Пример 4.6. Пусть рента выплачивается в конце года, $R=500$ руб., ставка 6% годовых. Найти современную величину ренты при условии, что рента выплачивается 10 лет. Находим

$$A=500\cdot\frac{1-(1+0{,}06)^{-10}}{0{,}06}=3680{,}04 \text{ руб.}$$

или, используя табличное значение $a_{10;6}=7{,}36008705$, получим $A=500\cdot7{,}360=3680{,}04$. Таким образом, все поизводимые в будущем платежи оцениваются в настоящий момент в сумме 3680,04 руб.

#6

Нетрудно убедиться в том, что чем выше i, тем меньше значение $a_{n;i}$ и тем ниже его предельная величина. Графическая иллюстрация зависимости коэффициента от срока и процентной ставки приведена на рис. 4.2.

Для $i=0$, $a_{n;i}=n$, если $n=1$, то $a_{n;i}=v$. Отметим также, что, если рост коэффициента наращения ренты при увеличении n теоретически не имеет предела, то у коэффициента приведения он есть. В самом деле

$$a_{\infty;i}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-(1+i)^{-n})}{i}=\frac{1}{i}.$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в году. Если проценты начисляются m раз в году, то очевидно, что в формулу (4.17) вместо $(1+i)^{-n}$ следует подставить эквивалентную величину $(1+j/m)^{-mn}$. После такой замены формула для определния современной величины ренты примет вид

$$A=R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1}. \qquad (4.19)$$

Умножим и разделим правую сторону формулы на j/m:

$$A=R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m}\cdot\frac{j/m}{(1+j/m)^{m}-1}.$$

Первый сомножитель представляет собой коэффициент приведения ренты со ставкой j/m и сроком n, второй — обратное значение коэффициента наращенной ренты с той же ставкой процента, откуда

$$A=R\frac{a_{mn;j/m}}{s_{m;j/m}}. \qquad (4.20)$$

Пример 4.7. Член годовой ренты равен 100 руб., начисление процентов ежеквартальное, номинальная ставка — 10%, срок ренты — 4 года. Найти современную величину ренты.

По данным задачи $R=1\,000$, $n=4$, $mn=16$, $j=0{,}1$, $j/m=0{,}1/4=0{,}025$. Находим $a_{16;2,5}=13{,}055$, $s_{4;2,5}=4{,}1525$, откуда

$$A=1\,000\cdot\frac{13{,}055}{4{,}1525}=3\,143{,}89 \text{ руб.}$$

#7

Современная величина p-срочной ренты ($m=1$). Если платежи производятся не один, а p раз в году, то коэффициенты приведения легко находятся на основе соответствующих дисконтированных рядов, точно так же как это было сделано на основе годовой ренты. В итоге для случая, когда проценты начисляются один раз в году, коэффициент приведения имеет вид

$$a^{(p)}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)}, \tag{4.21}$$

а современная величина ренты рассчитывается как

$$A=Ra^{(p)}_{n;i}. \tag{4.22}$$

Пример 4.8. В первой главе (п.1.1.) упоминалась авария на химическом заводе в Бхопале (Индия). Владелец предприятия, корпорация «Юнион Карбайд», предложила в качестве компенсации 200 млн. долл., выплачиваемых в течение 35 лет. Правительство Индии отвергло это предложение («За рубежом», 1985, N17). Мы отметили выше, что такая компенсация адекватна 57 млн. долл.. Покажем, как получена эта сумма. Так, если платежи должны производиться равномерно на протяжении 35 лет, то это постоянная рента, годовая сумма платежей равна $200/35=5{,}714$ тыс. долл. Пусть платежи производятся в конце каждого месяца. Тогда, если принять процентную ставку 10%, современная величина ренты, которая характеризует реальную стоимость предложенной «компенсации», составит согласно (4.22)

$$A=5{,}714\cdot\frac{1-1{,}1^{-35}}{12\cdot(1{,}1^{1/12}-1)}=57{,}59 \text{ млн. долл.} \qquad \#8$$

При начислении процентов m раз в году, причем $p\neq m$, имеем:

$$a^{(p)}_{mn;\,j/m}=\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}; \tag{4.23}$$

$$A=Ra^{(p)}_{mn;\,j/m}. \tag{4.24}$$

Для ситуации, когда количество платежей и начислений процентов в году совпадают, т. е. $p=m$, легко находим

$$a^{(m)}_{mn;\,j/m}=\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}=\frac{a_{mn;\,j/m}}{m}. \tag{4.25}$$

Пример 4.9. Имеется обязательство выплачивать в течение 5 лет по 10 тыс. руб. в год. Какая сумма необходима для того, чтобы вместе с начисляемыми на нее процентами обеспечить указанные платежи? Найдем решения для следующих вариантов условий выплат платежей

и начислений процентов: а) выплата один раз в конце года, начисление процентов по полугодиям; б) ежеквартальные выплаты и начисление процентов. Решение заключается в определении современных величин соответствующих рент:

а) по условиям задачи $p=1$, $R=10\,000$, $n=5$, $j=0{,}08$, $m=2$, $mn=10$. Откуда по формулам (4.19) и (4.20) находим

$$A=10\,000\cdot\frac{1-1{,}04^{-10}}{1{,}04^{2}-1}=38\,787{,}83$$

или

$$A=10\,000\cdot\frac{a_{10;4}}{s_{2;4}}=10\,000\cdot\frac{7{,}912718}{2{,}04}=38\,787{,}83 \text{ руб.}$$

б) в этом случае рента характеризуется параметрами: $p=m=4$, $R=10\,000$, $n=5$, $j=0{,}08$; $j/m=0{,}02$, $mn=20$. По формуле (4.25) получим

$$A=10\,000\cdot\frac{a_{20;4}}{4}=10\,000\cdot\frac{16{,}351433}{4}=40\,878{,}58 \text{ руб.}$$

или

$$A=10\,000\cdot\frac{(1-1{,}02)^{-20}}{0{,}08}=40\,878{,}58 \text{ руб.} \qquad \#9$$

Ренты с непрерывным начислением процентов. Члены ренты, дисконтированные по непрерывной ставке δ, образуют ряд: R, $Re^{-\delta}$, $Re^{-2\delta}$, ..., $Re^{-\delta(n-1)}$, для которого справедливо равенство:

$$A=Ra_{n;\delta}, \tag{4.26}$$

где коэффициент приведения находится следующим образом

$$a_{n;\delta}=\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}. \tag{4.27}$$

Для p-срочной ренты находим

$$A=Ra^{(p)}_{n;\delta}, \tag{4.28}$$

где коэффициент приведения

$$a_{n;\delta}^{(p)}=\frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\delta/p}-1)}. \qquad (4.29)$$

Сравнение современных величин обычных годовых и p-срочных рент с разными условиями. Современная величина ренты существенно зависит от того, как часто производятся платежи и начисляются проценты. Ниже приводятся соотношения современных величин соответствующих рент. Современные величины обозначены как $A(p;m)$: $A(1;1)$ — годовая рента с начислением процентов m раз в году, $A(p;\infty)$ — p-срочная рента с непрерывным начислением процентов и т. д. Для одних и тех же сумм годовых выплат, продолжительности ренты и процентных ставок ($i=j=\delta$) получим соотношения:

$$A(1;\infty)<\underset{m>1}{A(1;m)}<A(1;1)<\underset{p>1}{A(p;\infty)}<\underset{1<p<m}{A(p;m)}<\underset{p=m>1}{A(p;m)}<\underset{p>m>1}{A(p;m)}<\underset{p>1}{A(p;1)}.$$

Приведенные неравенства могут быть использованы при разработке условий контрактов, так как позволяют заранее сравнить их конечные результаты. Например, для одной и той же годовой суммы платежей процентной ставки и общего срока ренты, условия $p=2$ и $m=4$ дают меньшую современную величину, чем с $p=4$ и $m=2$. Для ренты, которая характеризуется параметрами: $R=10$ тыс. руб., $n=10$ лет, $i=j=\delta=6\%$, получим следующие значения современных величин:

	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=12$	$m=\infty$
$p=1$	73,60	73,29	73,13	73,02	72,96
$p=4$	75,24	74,94	74,79	74,69	74,64

Зависимость между наращенной и современной величинами рент. Современная величина ренты, как сказано выше, эквивалентна в финансовом смысле самой ренте. Таким образом, современная величина ренты представляет собой оценку, приуроченную к определенному моменту времени (для немедленной ренты — к началу срока). Наращенная сумма также является некоторым «обобщением» ренты, однако приурочена она к концу срока ренты. Интуитивно понятно, что между этими величинами должна существовать определенная зависимость. Нетрудно догадаться, что если A — оценка ренты на начало срока, а S — ее сумма с начисленными процентами, то наращение поцентов на сумму A за n периодов должно дать сумму, равную S. Проверим это:

$$A(1+i)^n=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n=R\frac{(1+i)^n-1}{i}=S. \qquad (4.30)$$

В свою очередь

$$Sv^n=A. \qquad (4.31)$$

Сократим (4.30) и (4.31) на R, получим

$$a_{n;i}(1+i)^n=s_{n;i}; \qquad s_{n;i}v^n=a_{n;i}. \qquad (4.32)\ (4.33)$$

Аналогичные зависимости легко найти и при применении других методов начисления процентов и дисконтирования.

Пример 4.10. В примере 4.9 современная величина (условие а)) равна 38 787,83 руб. Наращенная сумма для этих же условий составит

$$S=A(1+i/m)^{mn}=38\ 787{,}83\cdot 1{,}04^{10}=57\ 415{,}46 \text{ руб.} \qquad \#10$$

4.4. Определение параметров финансовых рент

Выше было установлено, что последовательность платежей в виде постоянной обычной годовой ренты описывается такими параметрами, как R, n, i. Для общего вида ренты необходимы еще параметры p и m. Значения указанных характеристик обычно предусматриваются в контрактах. Перечисленные данные достаточны для расчета основных обобщающих показателей — наращенной суммы ренты и современной ее величины. Однако при разработке контрактов или в ряде задач финансового анализа могут возникнуть случаи, когда заданными является одна их двух обобщающих характеристик (A или S) и неполный набор параметров ренты. В таких случаях требуется найти недостающий параметр. Рассмотрим методики решения подобных задач.

Определение члена ренты. В ряде случаев необходимо определить член ренты R по заданному значению наращенной суммы или современной величины, ставке процентов и числу членов ренты (ее продолжительности). Здесь возможны два варианта постановки задачи, зависящие от того, какая величина является исходной — наращенная сумма или современая величина. Допустим, сумма долга определена на какой-то момент в будущем. Предполагается, что долг будет погашен путем создания специального фонда на основе последовательных взносов в течение n лет при начислении на них процентов. В этом случае логично приравнять долг наращенной сумме. (Методика разработки планов погашения долга с помощью количественной теории рент для разных условий рассматриваются в главе 7). Отсюда член ренты легко найти на основе формул, характеризующих наращенную сумму S. Так, из (4.1) следует $R=\frac{S}{s_{n;i}}$. Соответственно, в случае, когда текущий долг погашается последовательными платежами, сумму долга приравнивают современной величине ренты. Откуда разовый платеж находится как $R=\frac{A}{a_{n;i}}$. Аналогично можно определить значения R для всех других случаев.

Пример 4.11. Необходимо определить размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, в каждой из которых предусматривается начисление на взносы годовых процентов по ставке 8%:

а) создать к концу пятилетия фонд, равный 1 млн. руб.;

б) погасить текущую задолженность, которая равна 1 млн. руб.

а) Приравняем размер создаваемого фонда к наращенной сумме постоянной ренты с параметрами $n=5$, $i=8\%$, откуда на основе формуле (4.1) находим

$$R=\frac{S}{s_{5;8}}=\frac{1\,000\,000}{5{,}8666096}=170\,456{,}2 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежегодные взносы в размере 170456,2 руб. достаточны при начислении на них процентов по указанной ставке для накопления 1 млн. руб.

б) Для определения ежегодной суммы погашения за 5 лет текущего долга в 1 млн. руб. приравняем его к современной величине ренты, члены которой погашают долг. Коэффициент приведения равен $a_{5;8}$. На основе формулы (4.18) находим

$$R=\frac{1\,000\,000}{a_{5;8}}=\frac{1\,000\,000}{3{,}99271}=250\,456{,}46 \text{ руб.} \qquad \#11$$

Определение срока ренты. Необходимость в определении срока ренты (и, соответственно, числа платежей) возникает в ходе разработки условий контракта. Искомая величина может быть определена по всем остальным параметрам ренты и наращенной сумме или современной ее величине. Для случая, когда рента годовая и проценты наращиваются по годовой ставке i, решая (4.1) и (4.18) относительно n, получим

$$n=\frac{\ln(\frac{S}{R}i+1)}{\ln(1+i)}; \qquad n=\frac{-\ln(1-\frac{A}{R}i)}{\ln(1+i)}.$$

Таблица 4.1.

Формулы для расчета продолжительности постоянных рент

Число платежей в году	Число раз начислений процентов в год	Современная величина ренты (A)	Наращенная сумма ренты (S)
$p=1$	$m=1$	$n=\frac{\ln(1-\frac{A}{R}i)^{-1}}{\ln(1+i)}$ (4.34)	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)}$ (4.39)
	$m>1$	$n=\frac{\ln(1-\frac{A}{R}((1+j/m)^m-1))^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$ (4.35)	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}((1+j/m)^m-1)+1\right)}{m\ln(1+j/m)}$ (4.40)
$p>1$	$m=1$	$n=\frac{\ln(1-\frac{A}{R}p((1+i)^{1/p}-1))^{-1}}{\ln(1+i)}$ (4.36)	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p((1+i)^{1/p}-1)+1\right)}{\ln(1+i)}$ (4.41)
	$m=p$	$n=\frac{\ln(1-\frac{A}{R}j)^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$ (4.37)	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}j+1\right)}{m\ln(1+j/m)}$ (4.42)
	$m\neq p$	$n=\frac{\ln(1-\frac{A}{R}p((1+j/m)^{m/p}-1))^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$ (4.38)	$n=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}p((1+j/m)^{m/p}-1)+1\right)}{m\ln(1+j/m)}$ (4.43)

Подобным же образом получим значения n для всех других видов обычных рент — см. табл. 4.1. Для рент, где проценты начисляются непрерывно, получим

для годовой ренты

$$n=\frac{\ln(\frac{S}{R}\delta+1)}{\delta}; \qquad n=\frac{-\ln(1-\frac{A}{R}\delta)}{\delta}; \qquad (4.44)\ (4.45)$$

для p-срочной ренты

$$n=\frac{\ln(\frac{S}{R}p(e^{\delta/p}-1)+1)}{\delta}; \qquad n=\frac{-\ln(1-\frac{A}{R}p(e^{\delta/p}-1))}{\delta}. \qquad (4.46)\ (4.47)$$

При расчете сроков ренты необходимо принять во внимание следующие моменты:

1. Расчетные значения сроков ренты, как правило, будут дробными. В этих случаях в качестве n для годовых рент принимается ближайшее меньшее целое число. Если рента p-срочная, то округлению до ближайшего меньшего числа подлежит число периодов ренты np. Например, если для квартальной ренты получено расчетное значение n = 6,28, то np = 25,12. эта величина округляется до 25 периодов. Откуда n = 6,25.

2. Поскольку расчетное число лет (или периодов) округляется до меньшего значения, то наращенные суммы и современные величины соответствующих потоков платежей оказываются меньше заданных. Если это допустимо исходя из содержания финансовой операции, то разность между заданной и полученной по округленному числу лет (числу периодов) обобщающими характеристиками должна быть компенсирована. Например, если речь идет о погашении долга с помощью выплаты постоянной ренты, то компенсация может быь осуществлена соответствующим взносом в начале ренты или повышением величины члена ренты.

3. Из приведенных выше формул для определения n, когда заданной является современная величина ренты A, следует, что продолжительность ренты будет положительным конечным числом только в том случае, когда соблюдаются следующие неравентства: для (4.34) $R>Ai$; для (4.35) $R>A\cdot j/m\cdot s_{m;j/m}$; для (4.36) $R>Ap[(1+j/m)^{m/p}-1]$; для (4.37) $R>Aj$; для (4.45) $R>A\delta$; для (4.47) $R>Ap(e^{\delta/p}-1)$. Иначе говоря, если A - текущее значение долга, погашаемого путем выплаты постоянной финансовой ренты, то долг будет погашен за конечное число платежей только при соблюдении условий, выраженных приведенными неравенствами. Если же условия таковы, что вместо неравенства окажется

равенство, например, для (4.35) $R=Ai$, то $n=\infty$, рента окажется вечной и долг теоретически погашается только при бесконечно длительной выплате платежей, т.е. практически не погашается. Наконец, если условия ренты предполагают, что $R<Ai$, то это означает, что начисленные на остаток долга проценты превышают размеры погасительных платежей и долг в сумме A не может быть погашен выплатой ренты с членом, равным R.

Пример 4.12. Сумма инвестиций, осуществленных за счет привлеченных средств, равна 10 млн.руб. Предполагается, что отдача от них составит 1 млн.руб. ежегодно (получаемых в конце года). За какой срок окупятся инвестиции, если на долг начисляются проценты по ставке 6% годовых?

Положим, что окупаемость имеет место в случае, когда современная стоимость поступлений (A) равна сумме инвестиций. Оценим необходимый срок окупаемости. Так как Ai = 0,6 млн.руб., т.е. $Ai<R=1$ млн.руб., то долг можно погасить. Однако уже при ставке 10% $Ai=1$ млн.руб., т.е. погашение долга практически невозможно.

По формуле (4.34) находим:

$$n=\frac{\ln(1-\frac{10}{1\cdot 0{,}06})^{-1}}{\ln 1{,}06}=15{,}72 \text{ года.}$$

Округляем полученный результат до $n=15$. В этом случае современная величина погасительных платежей составит: $A=1\ 000\ 000$. Однако $a_{15;6}=9\ 712\ 249$ руб., т.е. последовательность платежей не полностью обеспечивает погашение долга. Разность 287 751 руб. должна быть выплачена в начале операции или должен быть несколько увеличен размер годового платежа. Находим

$R=10/a_{15;6}=1{,}0296286$ млн. руб. #12

Определение ставки процентов. Расчетная величина ставки имеет важное значение в финансовом и экономическом анализе, например, при выяснении доходности (эффективности) различных финансовых и коммерческих операций, которые предполагают периодические выплаты (получения) денег. Необходимость определения процентной ставки возникает и на стадии подготовки соответствующего соглашения, предусматривающего поток платежей.

Проблема расчета ставки по остальным параметрам финансовой ренты не так проста, как это может показаться на первый взгляд. В простейшем случае она модет быть представлена следующим образом: необходимо решить уравнения

$$A=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \text{ или } S=R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

относительно i. Нетрудно убедиться в том, что прямого алгебраического решения нет. В связи с этим в свое время данной проблеме было посвящено множество работ. Так или иначе предлагаемые методы сводятся к получению приближенных оценок. В настоящее время процентную ставку i по заданным остальным характеристикам финансовой ренты рассчитывают с помощью интерполяционных формул, на основе итерационного метода Ньютона-Рафсона, или метода секущей. Значения i могут быть также оценены на основе разложения бинома Ньютона и использования двух-трех первых членов этого разложения, однако если i имеет высокое значение (около 0,1 и выше), то полученные при разложении бинома оценки будут содержать существенные погрешности.

Линейная интерполяция. Для оценивания уровня процентной ставки в зависимости от заданного коэффициента наращения или коэффициента приведения финансовой ренты (4.2) и (4.17) применима следующая интерполяционная формула:

$$i=i_н+\frac{a-a_н}{a_в-a_н}\cdot(i_в-i_н), \qquad (4.48)$$

где $a_в$ и $a_н$ — значения коэффициента наращения или коэффициента приведения для процентных ставок $i_в$ и $i_н$; a — коэффициент наращения или коэффициент приведения, значения которых получены по исходным данным как S/R и A/R.

Если начисления поцентов производятся m раз в году, то проще определить значение i по формуле (4.48), а затем, используя соотношение (2.9), найти искомую величину j.

Оценки i (или j), полученные по интерполяционной формуле, несколько отличаются от точных значений этой величины. Так, если i определяется по исходным A и R, то оценка оказывается несколько преувеличенной. В свою очередь оценка i по S и R немного меньше точной. Погрешности в оценках ставки по интерполяционной формуле сокращаются при уменьшении диапазона $i_в-i_н$, охватывающего искомое значение процентной ставки.

Пример 4.13. За 7 лет необходимо создать фонд, равный 1 млн. руб. Допустим, что для этого выделяется по 100 тыс. руб. ежегодно. Какова

должна быть ставка, по которой на взносы начисляются проценты, для того чтобы фонд был создан?

Рассиотрим несколько вариантов условий выплат и начисления процентов.

а) Взносы и начисление процентов в конце года. Коэффициент наращения, определяемый условиями задачи, $s_{7;i}=1000/100=10$. Предполагаем, что значение i находится в диапазоне 11-12%. Таким образом, $i_в=0{,}12$ и $i_н=0{,}11$, соответственно $s_в=s_{7;12}=10{,}089012$, $s_н=s_{7;11}=9{,}783274$. Диапазон для процентных ставок выбран правильно, так как $s_{7;11}<s_{7;i}<s_{7;12}$. Согласно (4.48) получим:

$$i=0{,}11+\frac{10-9{,}783274}{10{,}089012-9{,}783274}(0{,}12-0{,}11)=0{,}11709.$$

Проверка: по формуле (4.2) находим $s_{7;11{,}709}=9{,}999$, таким образом ставка 11,709% практически обеспечивает выполнение поставленных условий ($S/R=10$).

б) Взносы ежегодные, начисление поцентов 4 раза в году. В этом случае, использовав полученный выше ответ $i=0{,}11709$, находим по формуле (2.9) $j=4\cdot(1{,}11709^{1/4}-1)=0{,}11227$.

Проверка: по формуле (4.5) находим $s_{mn;\,j/m}=s_{28;11{,}227/4}=9{,}9989$.

в) Взносы производятся ежеквартально. Коэффициент наращения по условиям задачи $s^{(4)}_{7;i}=10$. По формуле (4.8) находим $s_в=s^{(4)}_{7;12}=10{,}532303$ и $s_н=s^{(4)}_{7;11}=10{,}1780058$. Поскольку $s_н>s_{7;i}=10$, то несколько снизим нижнюю границу интервала для процентной ставки. Пусть теперь $i_н=0{,}10$. Теперь интервал процентных ставок равен 10-11% и, следовательно,

$s_н=s_{7;10}=9{,}835877$, $s_в=s_{7;11}$, откуда

$$i=0{,}10+\frac{10-9{,}835877}{10{,}178058-9{,}835877}\cdot(0{,}11-0{,}1)=0{,}1048.$$

Проверка: $s^{(4)}_{7;10{,}48}=9{,}9989$. Результат близок к заданному значению коэффициента наращения $s^{(4)}_{7;i}=10$.

#13

Метод Ньютона-Рафсона. Напомним, что с помощью этого метода итеративным путем (последовательным приближением) решается уравнение $f(x)=0$. Общий вид рекуррентного соотношения

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k),$$

где $f'(x_k)$ — численной значение производной функции $f(x)$ при $x=x_k$; k — номер итерации. Исходное значение x_0 находится методом проб и ошибок.

Функция, необходимая для оценивания ставок процентов, разработана для двух вариантов исходных условий: когда заданным является отношение наращенной суммы ренты к годовой сумме платежа ($S:R$) и отношение современной величины ренты к этой же сумме ($A:R$). Первое соотношение равно коэффициенту наращения $s_{n;i}$ (или $s_{n;i}^{(p)}$), второе — коэффициенту приведения $a_{n;i}$(или $a_{n;i}^{(p)}$) Начнем с первого варианта. Исследуемая функция в данном случае имеет вид

$$\frac{S}{R}-\frac{(1+i_k{}^n)-1}{i_k}=0.$$

Для удобства будем оценивать значение не i, а $q=1+i$, тогда

$$f(q)=\frac{S}{R}-\frac{q^n-1}{q-1}=0.$$

Ниже приводятся функции $f(q)$ и их производные, необходимые для применения этого метода при оценке q для годовых и p-срочных рент с платежами в конце периодов и начислением процентов один раз в году: годовая рента

$$f(q_k)=q_k{}^n-S/R(q_k-1)-1; \qquad (4.49)$$

$$f'(q_k)=nq_k{}^{n-1}-S/R; \qquad (4.50)$$

p-срочная рента

$$f(q_k)=q_k{}^n-\frac{S}{R}p(q_k{}^{1/p}-1); \qquad (4.51)$$

$$f'(q_k)=nq_k{}^{n-1}-\frac{S}{R}(q_k{}^{1/p}); \qquad (4.52)$$

где q_k — значение q на k-й итерации.

Начальной значение $q_0=1+i_0$ выбирают так, чтобы $s_{n;i_0}$(или $s_{n;i_0}^{(p)}$) было наиболее близко к заданному отношению S/R.

Если рента предусматривает m разовое начисление процентов по номинальной ставке j, то следует оценить годовую ставку i и по формуле (2.9) определить j.

Для определения точности оценки i или проверки результата следует рассчитать коэффициент наращения $s_{n;i_k}$ (или $s_{n;i_k}^{(p)}$) и сравнить с исходной величиной S/R.

Пример 4.14. Рассчитаем i для условий примера 4.13 (вариант а). Поскольку задано, что $S/R=10$, то $s_{7;i}=10$. Выбираем q_0 следующим образом: находим табличное значение i при котором $s_{7;i}$ будет наиболее близко к 10. Этим значением оказывается 11%. Соответственно $q_0=1{,}11$. Далее находим по (4.49) и (4.50)

$$f(1{,}11)=1{,}11^7-10(1{,}11-1)-1=-0{,}02384;$$

$$f'(1{,}11)=7\cdot 1{,}11^{7-1}-10=3{,}0929.$$

Откуда

$$q_1=1{,}11-\frac{-0{,}02384}{3{,}0929}=1{,}1177 \text{ и } i_1=11{,}77\%.$$

Проверка: $s_{7;11,77}=10{,}018>10$. Допустим, что такая степень точности нас не удовлетворяет. Тогда выполним вторую итерацию:

$$f(1{,}1177)=0{,}0021, f'(1{,}1177)=3{,}6474;$$

$$q_2=1{,}1177-\frac{0{,}0021}{3{,}6474}=1{,}1171 \text{ и } i_2=11{,}71\%.$$

Проверка: $s_{7;11,71}=10{,}0001$. Уже вторая итерация дала высокую степень точности.

Пусть, как и выше, $S:R=10$, $n=7$, однако взносы производятся поквартально. Тогда $p=4$ и, положив $q_0=1{,}11$, находим

$$f(1{,}11)=1{,}11^7-10\cdot 4(1{,}11^{1/4}-1)-1=0{,}0188;$$

$$f'(1{,}11)=7\cdot 1{,}11^6-10\cdot 1{,}11^{1/4-1}=3{,}8457;$$

$$q_1=0{,}11-\frac{0{,}0188}{3{,}8457}=0{,}1051.$$

Проверка: $s_{7;10,54}^{(4)}=10{,}0089$.

Вторая итерация:

$f(1{,}1051)=0{,}0009;\ f'(1{,}1051)=3{,}472,$

$$q_2=10{,}0089-\frac{0{,}0009}{3{,}472}=0{,}1048.$$

Проверка: $s^{(4)}_{7;10,48}=9{,}9986.$

#14

Перейдем к оценке i, когда задано отношение $A{:}R$. Исходная функция в этом случае записывается как

$$\frac{A}{R}-\frac{1-q^{-n}}{q-1}=0.$$

Откуда находим: годовая рента

$$f(q_k)=q_k^{(n)}+\frac{A}{R}(q_k-1)-1; \tag{4.53}$$

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}-nq_k^{-(n+1)}; \tag{4.54}$$

p-срочная рента $f(q_k)=q_k^{-n}+\frac{A}{R}\cdot p(q_k^{1/p}-1)-1;$ (4.55)

$$f'(q_k)=\frac{A}{R}\cdot q_k^{1/p-1}-nq_k^{-(n+1)}. \tag{4.56}$$

Начальные значения $q_0=(1+i_0)$ выбираются так, чтобы $a_{n;i_0}$ или $a^{(p)}_{n;i_0}$ было близко к заданному отношению $A{:}R$.

Для определения точности оценки i следует рассчитать коэффициенты приведения рент $a_{n;i_k}$ или $a^{(p)}_{n;i_k}$ и сравнить результат с заданной величиной $A{:}R$.

Пример 4.15. Какова доходность инвестиций, выраженная в виде годовой процентной ставки, если вложения составили 1 млн. руб., а ежегодные доходы в сумме 100 тыс. руб. поступают: а) в конце каждого года; б) в конце каждого квартала? Общий период поступлений дохода 15 лет.

Сумму инвестиций приравняем к современной величине потока платежей, образованного из показателей дохода, соответственно $A{:}R=1\ 000\ 000{:}100\ 000=10$. Первоначальное значение процентной ставки найдем по табличному значению коэффициента приведения, ближайшему к 10. Для срока 15 лет ближайшие к 10 значения $a_{15;5,5}=10{,}037$ и $a_{15;6}=9{,}71$. Примем $i_0=5{,}6$, откуда $q_0=1{,}056$.

а) При поступлении доходов в конце года находим по формулам (4.53) и (4.54):

$$f(1{,}056)=1{,}056^{-15}+10(1{,}056-1)-1=0{,}00161;$$

$$f'(1{,}056)=10-15\cdot 1{,}056^{-16}=3{,}7271;$$

$$q_1=1{,}056-0{,}00161/3{,}7271=1{,}0557;i_1=5{,}57\%.$$

Проверка: $a_{15;5,57}=9{,}991$. Допустим, что такая точность не отвечает требованиям. Для второй итерации находим:

$$f(1{,}0557)=0{,}0005;f'(1{,}0557)=3{,}6985;q_2=1{,}05556,i_2=5{,}556\%.$$

Проверка: $a_{15;5,556}=10{,}0003.$

б) Значения функций для этих условий находим по формулам (4.55) и (4.56). Для оценки начального уровня ставки i_0 определим несколько значений $a^{(4)}_{15;i}$, см.(4.21). Для $i=5{,}5a^{(4)}_{15;5,5}=10{,}24$, для $i=5{,}0a^{(4)}_{15;6}=9{,}93$. Так как $a^{(4)}_{15;i}=10$, то выбираем значение i, которое ближе к $i=6\%$. Пусть $i_0=5{,}9\%$, тогда

$$f(1{,}059)=1{,}059^{-15}+10\cdot 4(1{,}059^{1/4}-1)-1=0{,}00059;$$

$$f'(1{,}059)=10\cdot 1{,}059^{1/4-1}-15\cdot 1{,}059^{-16}=3{,}5846;$$

$$q_1=1{,}059-0{,}00059/3{,}5846=1{,}05883;i_1=5{,}883\%.$$

Проверка: $a^{(4)}_{15;5,883}=10{,}0003.$ #15

Пусть финансовая рента предусматривает непрерывное начисление процентов или непрерывное дисконтирование по ставке δ . Если в качестве исходного параметра задано соотношение S/R, то необходимую нам функцию можно записать в виде

$$\frac{S}{R}-\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1}=0.$$

Соответственно, для годовой ренты

$$f(\delta)=e_k^{\delta n}-S/R\cdot(e_k^{\delta}-1)-1; \tag{4.57}$$

$$f'(\delta)=ne_k^{\delta n}-{}^{S}\!/_{R}\cdot e_k^{\delta};\qquad(4.58)$$

для p-срочной ренты

$$f(\delta)=e_k-{}^{S}\!/_{R}\cdot p\cdot(e_k-1)-1;\qquad(4.59)$$

$$f'(\delta)=ne_k^{\delta n}-{}^{S}\!/_{R}\cdot e_k^{\delta/p},\qquad(4.60)$$

где e_k^{δ} — значение e^{δ} на k-ой итерации. Для случаев, когда исходным является отношение $A:R$, сразу получим

для годовой ренты

$$f(\delta)=e_k^{-\delta n}+{}^{A}\!/_{R}\cdot(e_k^{\delta}-1)-1;\qquad(4.61)$$

$$f'(\delta)={}^{A}\!/_{R}\cdot e_k^{\delta}-ne^{-\delta n};\qquad(4.62)$$

для p-срочной ренты

$$f(\delta)=e_k^{-\delta n}+{}^{A}\!/_{R}\cdot p\cdot(e_k^{\delta/p}-1)-1;\qquad(4.63)$$

$$f'(\delta)={}^{A}\!/_{R}\cdot e_k^{\delta/p}-ne_k^{-\delta n}.\qquad(4.64)$$

Начальное значение силы роста δ_0 выбирают так, чтобы $s_{n;\delta_0}$ (или $a_{n;\delta_0}$) были близки к заданным отношениям ${}^{S}\!/_{R}$ (или ${}^{A}\!/_{R}$).

4.5. Анализ других видов регулярных потоков платежей.

Регулярные последовательности платежей, которые послужили выше объектом количественного анализа, не исчерпывают всего их многообразия. Обратимся к таким видам рент, которые, может быть, встречаются в практике не столь уж часто, однако знакомство с количественным их анализом представляется весьма важным. Ренты, о которых здесь идет речь, отличаются от рассмотренных выше во многих отношениях: по применяемым процентным ставкам, срокам платежей, моментам производства платежей и т. д. Ниже показаны методы расчетов наращенных сумм и современных величин следующих видов рент:

— с периодом выплат, превышающим год;
— с неограниченным сроком выплат (вечные);
— отложенные ренты;
— ренты пренумерандо и ренты с платежами в середине периодов.

Непрерывные потоки платежей (постоянные и переменные) обсуждаются в следующей главе.

Рента с простыми процентами. В большинстве случаев в финансовых операциях, предусматривающих последовательные платежи, используется сложная процентная ставка. Однако это не единственно возможный способ начисления процентов. Иногда начисление осуществляется по простым процентным ставкам. Рассмотрим метод определения наращенной суммы и современной величины подобных рент. Итак, пусть простые проценты начисляются в конце периодов начисления p раз в году. Платежи с начисленными процентами на конец срока ренты представляют собой последовательность:

$$R_a(1+{}^{(N-1)}\!/_{p}\cdot i),R_a(1+{}^{(N-2)}\!/_{p}\cdot i)\ ,\ldots,\ R_a,$$

где R_a — сумма разового платежа ($R_a={}^{R}\!/_{p}$), N — общее число платежей ($N=np$). Данная последовательность является арифметической прогрессией, первый член которой равен R_a, а прирост — $\frac{R_a i}{p}$. Сумма членов этой прогрессии или наращенная сумма ренты составит

$$S=\sum_{1}^{N}[1+\frac{(t-1)i}{p}]R_a=R_aN[1+\frac{(N-1)i}{2p}].\qquad(4.65)$$

В частном случае, для годовой ренты имеем

$$S=nR[2+(n-1)i]/2.\qquad(4.66)$$

Соответственно, для современной величины ренты (применяя математический учет по простой ставке процентов — см. 1.3) находим в общем случае

$$A=R_a\sum_{t=1}^{N}(1+\frac{ti}{p})^{-1},\ t=1,\ldots,N,\qquad(4.67)$$

и, в частности, для годовой ренты

$$A=R\sum(1+ti)^{-1},\ t=1\ ,\ldots,\ n.\qquad(4.68)$$

Пример 4.16. Начисление по простой ставке, естественно, дает меньшую наращенную сумму ренты, чем по сложной. Например, для годовой ренты $R=100$, $n=5$, $i=10\%$, получим при применении простой ставки

$$S=100\frac{2+4\cdot 0{,}1}{2}=600$$

и для сложной

$$S=100\cdot s_{5;10}=610{,}51. \qquad \#16$$

Если для дисконтирования применяются простые учетные ставки d, то современная величина (банковский учет, см.1.4) определяется как

$$A=\sum_{t=1}^{N}(1-t^{d}/_{p})R_a=R_aN(1-{}^{(N+1)}/_{2}\cdot{}^{d}/_{p}). \qquad (4.69)$$

Необходимость в определении современной величины ренты с простыми процентами возникает, например, во внешнеторговых операциях, когда оплата покупки производится с помощью портфеля векселей, сроки которых равномерно распределены во времени. В этой операции современная величина характеризует сумму, которую получит экспортер при одновременном учете всех векселей (операция á форфэ; см. 9.4.)

Пример 4.17. Какую сумму получит экспортер при учете портфеля векселей, выданных ему в качестве уплаты за товар? Каждый вексель выписан на 5 000 руб., погашение векселей производится последовательно по полугодиям; общее число векселей равно 6. Банк учитывает векселя по учетной ставке 7,75%. Согласно (4.69) получим:

$$A=5\,000\cdot 6\cdot[1-\frac{6+1}{2}\cdot\frac{0{,}0775}{2}]=25\,931{,}25 \text{ руб.} \qquad \#17$$

Смешанные ренты. В инвестиционной практике при расчете наращенных сумм иногда применяется особый способ начисления процентов для p-срочных рент. Наращенная сумма таких рент в пределах года определяется по простым процентам, а за целые годовые периоды — по сложным. В этом случае

наращенная сумма за платежи в пределах года составит

$$R_{год}=R_a(p+{}^{(n-1)}/_{2}\cdot i). \qquad (4.70)$$

Величина $R_{год}$ представляет собой член годовой ренты, выплачиваемой в течение n лет, R_a — сумма разового платежа.

Наращенная сума за весь срок ренты

$$S=R_{год}s_{n;i}.$$

Пример 4.18. Пусть в начале каждого месяца на счет вносится сумма, равная 1тыс. руб. Определить накопленную сумму через 3 года при

условии, что проценты начисляются по ставке 7%, причем в пределах года на поступающие суммы начисляются простые проценты, а за целые годовые периоды — сложные. Поток платежей имеет параметры: $R_a=1000, n=3, p=12, i=7\%, s_{3;7}=3{,}2149$ Согласно (4.70) получим:

$$R_{год}=1\,000\cdot(12+(12-1)2\cdot 0{,}07)=12\,385 \text{ руб;}$$

$$S=12\,385\cdot 3{,}2149=39\,816{,}5 \text{ руб.} \qquad \#18$$

Рента с периодом, превышающим год. При расчете эффективности капиталовложений или других долгосрочных финансовых операциях могут встретиться ренты, члены которых выплачиваются через периоды, превышающие год (раз в два года, раз в пятилетие и т. д.). В финансовой литературе такие ренты не рассматриваются, однако, на наш взгляд, они представляют определенный интерес, особенно при выборе варианта производственных инвестиций и их анализе. Выведем формулы для наращенной суммы и современной величины таких рент.

Пусть r — интервал времени между двумя платежами (период ренты), $r>1$, проценты начисляются раз в году. Тогда современная величина первого платежа, произведенного в конце года r, будет равна R_rv^r, современная величина второго платежа составит R_rv^{2r} и т. д., современная величина последнего платежа, при условии, что n кратно r, равна R_rv^n. Легко убедиться в том, что приведенный ряд дисконтированных платежей представляет собой геометрическую прогрессию с числом членов $^{n}/_{r}$, с первым членом R_rv^r и знаменателем, равным v^r. Найдем коэффициент приведения этой ренты. Обозначим его как $a_{r;i}$. Итак

$$a_{r;i}=v^r\cdot\frac{v^{r(n/r)}-1}{v^r-1}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r-1}=\frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}, \qquad (4.71)$$

где $a_{n;i}$ — коэффициент приведения ренты с числом периодов, равным n (см.4.2), $s_{r;i}$ — коэффициент наращения ренты, у которой срок равен r.

Пример 4.19. Допустим, необходимо сравнить два варианта строительства дороги. Первый требует разовых вложений, равных 6 млн. руб. и капитальный ремонт стоимостью 0,8 млн. руб. каждые 5 лет. Второй — 7 млн. руб. и капитальный ремонт стоимостью 0,4 млн. руб. каждые 10 лет. Допустим, что временной горизонт, учитываемый в расчете составит 50 лет.

Приведенные затраты при условии, что $i=10\%$ составят

$$A_1=6+0{,}8\frac{a_{50;10}}{s_{5;10}}=7{,}3 \text{ млн. руб.},$$

$$A_2=7+0{,}4\frac{a_{50;10}}{s_{10;10}}=7{,}25 \text{ млн. руб.},$$

т.е. практически варианты в финансовом отношении при выбранной процентной ставке оказываются равноценными. Чем выше ставка процентов, тем меньше на результат расчета будет влиять стоимость ремонтных работ и больше — первоначальные затраты. Так, при $i=15\%$

$A_1=6{,}79$ и $A_2=7{,}13$ млн. руб.

#19

Вечная рента. Под вечной рентой (perpetuity) понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено — она выплачивается в течение бесконечного числа лет. Вечная рента не является чисто абстракцией — в практике иногда сталкиваются с такого рода случаями (некоторые виды облигационных займов). С вечной рентой встречаются и в ряде долгосрочных финансовых операций, когда предполагается, что период функционирования соответствующей организации не оговаривается какими-либо конкретными сроками, в частности, при оценке способности пенсионных фондов отвечать по своим обязательствам.

Исходя из сущности вечной ренты можно полагать, что ее наращенная сумма равна бесконечно большой величине. Это легко доказывается формально. На первый взгляд представляется бессодержательным и определение современной величины вечной ренты. Однако это не так. Этот показатель оказывается полезным в ряде расчетов (например, при замене некоторых видов рент, их выкупе и т. д.). Современную величину вечной ренты можно определить достаточно просто. Для этого обратимся к коэффициенту приведения. Выше было показано, что пределом для $a_{n;i}$ при $n\to\infty$ является величина $a_\infty=1/i$. Откуда для вечной ренты находим

$$A_\infty=R/i\,. \tag{4.72}$$

Таким образом, современная величина зависит только от величины члена ренты и принятой ставки процентов. Из (4.72) следует, что

$$R=A_\infty i, \tag{4.73}$$

т.е. член вечной ренты равен проценту от современной ее величины.

Формула (4.73) применяется при капитализации постоянных доходов, при этом предполагается, что доход в сумме R будет поступать неопределенно долго в конце каждого года, а ставка равна i. Смысл современной величины вечной ренты можно пояснить следующим образом. Коэффициент a_∞ есть сумма дисконтированных платежей. Платежи, производимые в достаточно отдаленном будущем, оказывают весьма малое влияние на значение коэффициента приведения ограниченной ренты $a_{n;i}$, с ростом n увеличение $a_{n;i}$ будет все время замедляться и в пределе $a_{\infty;i}=1:i$ (см. рис.4.2) В табл. 4.2 приведены значения $a_{n;i}$ и $a_{\infty;i}$ для $i=6\%$ и разной продолжительности ренты.

Таблица 4.2

Коэффициенты приведения годовой ренты для различных сроков

Продолжительность ренты, лет	10	50	100	200	Вечная
Коэффициент приведения	7,3601	15,7619	16,6175	16,6665	16,6667

Рассмотрим более общий случай вечной ренты, когда $p>1$ и $p=m$.

$$A_\infty=\frac{R}{p\cdot((1+j/m)^{m/p}-1)}. \tag{4.74}$$

Если $p=m$, то $A_\infty=R:j$. (4.75)

Наконец, для ренты с периодом, превышающим год, получим

$$A_\infty=\frac{R_r}{(1+i)^r-1}=\frac{R_r i}{s_{r;i}}. \tag{4.76}$$

Коэффициент наращения $s_{r;i}$ определяется по формуле (4.2), причем $r=n$.

Пример 4.20. Требуется выкупить (погасить единовременным платежом) вечную ренту, член которой (5 тыс. руб.) выплачивается в конце каждого полугодия, процент начисляется раз в году ставка $i=5\%$. Современная величина вечной ренты согласно (4.74) составит:

$$A_\infty=\frac{10}{2[(1+0,05)^{1/2}-1]}=202,47$$ тыс. руб. Иначе говоря, сумма, равная 202,47 тыс., обеспечит бесконечно долгую выплату платежей по полугодиям (по 5 тыс. руб.) при условии, что на остаток будет начисляться процент по указанной ставке. Если начисление процентов производится по той же годовой ставке не один, а два раза в году (т.е. $p=m=2$), то $j=0,05$ и

$$A_\infty=10:0,05=200 \text{ тыс. руб.}$$

#20

Полученные формулы для вечных рент применимы и в случаях, когда поток платежей на самом деле не является вечным. Они дают приемлемые приближенные результаты, если платежи производятся длительное время. Ошибка при высокой процентной ставке будет в этом случае незначительна. Так, для $R=100$ при $i=10\%$, $n=100$ приближенное значение современной величины ренты, найденное по формуле (4.73), составит 1 000, точное 999,93.

Отложенная рента. Выше упоминались два вида рент, различающихся по времени их начала: немедленные и отложенные ,отсроченные (deffered annuity). Начало отсроченной ренты приходится на какой-то момент в будущем относительно некоторого предшествующего момента. Современную величину отложенной ренты можно определить с помощью дисконтирования по принятой ставке процентов современной величины соответствующей немедленной ренты. Дисконтный множитель определяется с учетом периода отсрочки. Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна A, то современная величина отложенной на t лет ренты составит

$$A_t=Av^t, \tag{4.76}$$

где v^t — дисконтный множитель за t лет.

Пример 4.21. Рента будет выплачиваться в течение 10 лет спустя 3 года после дня Д. Член ренты равен 500 руб., ставка процентов равна 6%; проценты начисляются раз в конце года, необходимо определить современную стоимость ренты на день Д. По условию задачи $t=3, n=10, P=5\,000, i=0,06$. Откуда в соответствии с (4.76) получим

$$A_3=5\,000\cdot a_{10;6}\cdot 1,06^{-3}=5\,000\cdot 7,360087\cdot 0,839619=30\,898,35$$ руб.

#21

Рента пренумерандо. Все приведенные в данной главе расчетные формулы относятся к обычным рентам (рентам постнумерандо), т.е.

рентам, члены которых выплачиваются в конце каждого периода. Рассмотрим теперь ренту у которой платежи производятся в начале каждого периода (рента пренумерандо (annuity due)). Различие между двумя видами рент заключается лишь в числе периодов начисления процентов. Легко понять, что каждый член ренты пренумерандо «работает» на один период больше, чем в обычной ренте. Например, первый член обычной ренты, равный R, обратится к концу ренты в величину $R(1+i)^{n-1}$, а первый член ренты пренумерандо с процентами к концу срока равен $R(1+i)^n$. В свою очередь последний член обычной ренты, равный R, не приносит проценты, а у ренты пренумерандо к концу срока он вырастает до $R(1+i)$. Поскольку к концу срока ренты каждый член ренты пренумерандо с начисленными процентами больше соответствующего показателя ренты постнумерандо в $1+i$ раз, то, следовательно, наращенная сумма для годовой ренты пренумерандо $\ddot{S}_n$ равна:

$$\ddot{S}_n=S(1+i). \tag{4.77}$$

Нетрудно получить и другую формулу для определения наращенной суммы ренты пренумерандо

$$\ddot{S}_n=Rs_{n;i}(1+i)=R\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}=R(s_{n+1;i}-1). \tag{4.78}$$

Аналогичным путем получим формулы наращенной суммы для других видов рент: для годовой ренты с m-разовым и непрерывным начислением процентов

$$\ddot{S}_n=S(1+j/m)^m; \tag{4.79}$$

$$\ddot{S}_n=Se^{\delta}. \tag{4.80}$$

В свою очередь для p-срочной ренты получим

$$\ddot{S}_n=S(1+i)^{1/p}; \tag{4.81}$$

$$\ddot{S}_n=S(1+j/m)^{m/p}; \tag{4.82}$$

$$\ddot{S}_n=Se^{\delta/p}. \tag{4.83}$$

Величины S во всех формулах определяются для соответствующих обыкновенных рент, см.3.2.

Пример 4.22. Наращенная сумма обыкновенной ренты (см. пример 4.4) при условии, что платежи производятся в конце квартала (вариант б), составила 23,098 тыс. руб. Если бы они выплачивались в начале квартала, то согласно (4.82)

$$S_n=23{,}098\cdot 1{,}03^{2/4}=23{,}442 \text{ тыс. руб.} \qquad \#22$$

Современная величина рент пренумерандо находится аналогичным путем — современная величина обыкновенной ренты умножается на соответствующий множитель наращения:

$$A_n=A(1+i); \; A_n=A(1+j/m)^m \text{ и т. д.}$$

Рента с платежами в середине периодов. Потоки поступлений от кредитных и ссудных операций, облигаций и других финансовых инвестиций в большинстве случаев без какой-либо натяжки можно описать в виде обыкновенных рент, или рент пронумерандо, так как в контрактах обязательно оговариваются моменты поступления денег. Сказанное не распостраняется на потоки доходов от производственных инвестиций. Доходы здесь распределены в пределах некоторых отрезков времени. Применение обыкновенных рент или рент пренумерандо для характеристики таких потоков приведет к некоторым смещениям в значении расчетных показателей. В подобных ситуациях для уменьшения погрешности можно суммарные за период величины платежей отнести к середине периодов. Наращенные суммы и современные величины таких рент находятся умножением соответствующих обобщающих характеристик на множитель наращения за половину периода. Таким образом, для современных величин находим:

$$A_{1/2}=A(1+i)^{1/2}, \qquad A_{1/2}=A(1+j/m)^{m/2},$$

$$A_{1/2}=A(1+j/m)^{m/2p}, \qquad A_{1/2}=Ae^{\delta/2} \text{ и т.д.,}$$

где A — современная величина ренты, у которой R — годовая сумма платежей.

ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ПЕРЕМЕННЫХ ПОТОКОВ ПЛАТЕЖЕЙ

5.1. Потоки с разовыми изменениями платежей

В практике часто сталкиваются с потоками платежей, члены которых изменяются во времени. Обычно такие изменения связаны с какими-то обстоятельствами производственного или коммерческого характера, например, планируется, что в связи с увеличением производственных мощностей периодические поставки продукции увеличиваются с какого-то момента времени в будущем. Условия поставок могут предусматривать и обратный процесс — их сокращение. Эти и многие другие последовательности платежей можно представить в виде переменных потоков платежей. Частным случаем такого потока является *переменная рента*, т. е. рента, члены которой изменяются в соответствии с каким-либо заданным законом развития. Если такого закона нет, то соответствующая последовательность платежей представляет собой *нерегулярный поток платежей.*

Ниже рассмотрены следующие переменные дискретные потоки платежей: нерегулярный, переменная рента с разовыми изменениями размера члена ренты, пременные ренты с постоянным абсолютным приростом члена ренты и с постоянным темпом роста члена ренты. В финансовой литературе, посвященной количественному финансовому анализу, иногда упоминается еще один вид ренты — так называемая *полиномиальная* рента, т. е. рента, члены которой изменяются по многочлену, в простейшем случае — по параболе второй степени. Количественный анализ в этом случае заключается в расчете параметров многочлена, а затем — общающих характеристик ренты. Вероятно, необходимость в практическом применении таких рент крайне мала. Поэтому они в настоящей работе не рассматриваются*.

Переменные потоки платежей встречаются относительно редко, во всяком случае реже, чем постоянные (в зарубежной финансовой литературе о них, как правило, даже не упоминается). В связи с этим их анализ дан здесь менее детально, чем постоянных. Основное внимание уделено принципиальным зависимостям, знание которых позволяет

---

* *Оценка параметров таких рент при различных ограничениях, определяемых контрактами, а также методы расчета наращенных сумм и современных величин обсуждаются в книге: Е. Четыркин. Финансовые вычисления во. внешнеэкономической деятельности. — М.: Финансы и статистика, 1984.*

разработать формулы для конкретных видов рент, отличающихся по своим условиям от рент, рассмотренных в главе 4.

Нерегулярный поток платежей. Временные интервалы между двумя соседними членами в нерегулярном потоке платежей могут быть любыми. Обобщающие характеристики получают только путем прямого счета, а именно:

наращенная сумма (начисление процентов раз в году)

$$S=\sum_t R_t(1+i)^{n-t}; \tag{5.1}$$

наращенная сумма (непрерывные проценты)

$$S=\sum_t R_t e^{\delta(n-t)}; \tag{5.2}$$

современная величина (начисление процентов раз в году)

$$A=\sum_t R_t v^t; \tag{5.3}$$

современная величина (непрерывные проценты)

$$A=\sum_t R_t e^{-\delta t}, \tag{5.4}$$

где t — время от начала потока платежей до момента выплаты, R_t — сумма платежа (член ренты).

Пример 5.1. График предусматривает следующий порядок выдачи ссуд во времени: 01.07.1990 г. — 50 тыс. руб., 01.01.1991 г. — 150 тыс. руб., 01.01.1993 г. — 180 тыс. руб. Необходимо найти сумму задолженности на 01.01.1994 г. при условии, что кредит выдан под 8% годовых. Находим

$$S=50\cdot 1{,}08^{3,5}+150\cdot 1{,}08^{3}+180\cdot 1{,}08=448{,}813 \text{ тыс. руб.}$$

Современная величина этого потока на 01.07.1990 г. равна:

$$A=50+150\cdot 1{,}08^{-0,5}+180\cdot 1{,}08^{-2,5}=342{,}833 \text{ тыс. руб.}$$

#1

Переменная рента с разовыми изменениями членов ренты. Пусть общая продолжительность ренты равна n, этот срок разбит на k участков, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t

($t=1,...,k$). Приведем формулы только для случаев, когда проценты начисляются раз в году. Наращенная сумма (годовая рента)

$$S=R_1 s_{n_1;i}(1+i)^{n-n_1}+R_2 s_{n_2;i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)}+\ .\ .\ .\ +R_k s_{n_k;i}\ . \tag{5.5}$$

В частном случае, когда $k=2$, наращенная сумма (годовая рента)

$$S=R_1 s_{n_1;i}(1+i)^{n_2}+R_2 s_{n_2;i}. \tag{5.6}$$

Коэффициенты наращения годовой ренты $s_{n;i}$ определяются по формуле (4.2), значения этих коэффициентов приводятся в Приложении 4.

Современная величина (годовая рента)

$$A=R_1 a_{n_1;i}+R_2 a_{n_2;i} v^{n_1}+...+R_k a_{n_k;i} v^{n-n_k}. \tag{5.7}$$

Если $k=2$, то современная величина (годовая рента)

$$A=R_1 a_{n_1;i}+R_2 a_{n_2;i} v^{n_1}. \tag{5.8}$$

Коэффициенты приведения годовой ренты $a_{n;i}$ определяются по формуле (3.18), значения этих коэффициентов приводятся в Приложении 5.

Формулы (5.5) — (5.8) могут применяться и тогда, когда ставка процента изменяется одновременно с изменением члена ренты. В этом случае в каждом слагаемом этих формул берется соответствующее значение i_k. Кроме того, они применимы и для p-срочных рент (см. 4.2 и 4.3), в этом случае вместо коэффициентов $s_{n;i}$ и $a_{n;i}$ следует использовать $s_{n;i}^{(p)}$ и $a_{n;i}^{(p)}$.

Пример 5.2. По условиям соглашения производятся периодические взносы, причем общий срок выплат (5 лет) делится на два периода. В первом из них (3 года) выплачивается по 100 тыс. руб. в конце каждого полугодия, во втором — по 120 тыс. руб. Ставка процента в первом периоде — 6% годовых, во втором — 8%. Необходимо найти наращенную сумму.

По условиям задачи $n=5$, $n_1=3$, $n_2=2$, $p=2$, $i_1=0{,}06$, $i_2=0{,}08$; $R_1=100\cdot 2=200$, $R_2=120\cdot 2=240$. Данная рента p-срочная, поэтому в формуле (5.6) вместо $s_{n;i}$ используем $s_{n;i}^{(p)}$ и получаем:

$$S=200 s_{3;6}^{(2)}(1+0{,}06)^2+240 s_{2;8}^{(2)}=200\cdot 3{,}230658\cdot 1{,}1236+$$
$$+240\cdot 2{,}120799=1234{,}98 \text{ тыс. руб.}$$

#2

5.2. Ренты с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть члены ренты изменяются равномерно — с постоянным абсолютным приростом (арифметическая прогрессия). Если рента годовая (выплаты в конце года), то размеры последовательных платежей составят величины R_1, R_1+a, R_1+2a, ..., $R_1+(n-1)a$. Величина t-го члена рены равна $R_1+(t-1)a$. Определим современную величину и наращенную сумму такой ренты. Для этого обратимся к общей формуле современной величины ренты (5.1), заменив в ней R_t на R, $R+a$, ..., $R+(t-1)a$. Получим

$$A=Rv+(R+a)v^2+\ldots+(R+(t-1)a)v^n. \qquad (5.9)$$

Умножим равенство на $(1+i)$ и вычтем из обеих его частей соответствующие части уравнения (5.9), получим

$$iA=R+av+av^2+\ldots+av^{n-1}-av^n-(t-1)av^n,$$

или несколько преобразив это выражение, имеем

$$A=(R+\frac{a}{i})a_{n;i}-\frac{nav^n}{i}. \qquad (5.10)$$

Итак, современная величина переменной ренты, изменяющейся по арифметической прогрессии, представляет собой разность переменной величины постоянной ренты, член которой равен $R+a/i$, и поправочный величины nav^n/i. Наращенную сумму данной ренты легко получить, умножив выражение (5.9) на $(1+i)^n$, после чего

$$S=(R+\frac{a}{i})s_{n;i}-\frac{na}{i}. \qquad (5.11)$$

Таким образом, наращенная сумма ренты, следующей арифметической прогрессии, равна наращенной сумме постоянной ренты, член которой равен $R+a/i$ за вычетом некоторой поправки, пропорциональной разности прогрессии.

Пример 5.3. Предполагается выплачивать платежи таким образом, что каждый год они увеличиваются на 100 руб. Первая уплата равна 0,5 тыс. руб. Ставка равна 6% годовых, срок выплат — 8 лет. Платежи и начисление процентов производятся раз в конце года. Необходимо найти современную величину и наращенную сумму данной ренты.

По условиям задачи имеем: $R_1=500$, $a=100$, $i=0,06$, $n=8$. Табличные значения коэффициентов: $a_{8;6}=6,20979$ и $v^8=1,06^{-8}=0,62741$; $1,06^8=1,59385$. Откуда по формуле (5.10):

$$A=(500+\frac{100}{0,06})\cdot 6,20979-8\cdot 100\cdot\frac{0,62741}{0,06}=5089,07 \text{ руб.}$$

Для определения S воспользуемся соотношением (4.31):

$$S=5089,07\cdot 1,06^8=8111,21 \text{ руб.}$$

Пусть условия остаются без изменения за исключением того, что члены ренты не увеличиваются, а уменьшаются во времени, скажем, $a=-50$. Тогда

$$A=(500-\frac{50}{0,06})\cdot 6,20979+8\cdot 50\cdot\frac{0,62741}{0,06}=2112,80 \text{ руб.}$$

$$S=2112,80\cdot 1,59385=3367,49 \text{ руб.}$$ #3

Если рассматриваемый вид переменной ренты предусматривает выплаты членов ренты p раз в году (p-срочная рента), то последовательные выплаты равны

$$R_1,\ R_1+\frac{a}{p},\ R_1+2\frac{a}{p},\ \ldots,\ R_1+(pn-1)\frac{a}{p}$$

или

$$R_t=R_1+(t-1)\frac{a}{p},$$

где t — номер члена ренты, $t=1,...,pn$. При начислении процентов один раз в году здесь применимы следующие формулы:

наращенная сумма

$$S=\sum_1^{pn}(R_1+\frac{a}{p}(t-1))q^{n-t/p}; \qquad (5.12)$$

современная величина

$$A=\sum_1^{pn}(R_1+\frac{at}{p})v^{t/p}, \qquad (5.13)$$

где t/p — период от начала ренты до момента производства платежа R_t.

Пример 5.4. Платежи в течение двух лет увеличиваются поквартально на 25 тыс. руб., первый платеж 500 тыс. руб., проценты начисляются по годовой ставке 6%. По условиям задачи $R_1=500$, $a/p=25$, $i=0{,}06$, $n=2$, $pn=8$.

Наращенная сумма к концу двухлетнего срока составит

$$S=\sum_{1}^{8}(500+25\cdot(t-1))\cdot 1{,}06^{2-t/4}=4\ 257{,}5 \text{ тыс. руб.} \qquad \#4$$

При разработке условий соглашения о платежах, реализуемых в виде ренты, изменяющейся по арифметической прогрессии, может возникнуть потребность в определении размера первого платежа R_1 при заданном значении прироста платежей a или, наоборот, — в определении a при заданном R_1. И в том и в другом случае заданными будут также n, i, A или S. С подобного рода ситуациями сталкиваются в случаях, когда известна текущая сумма долга (ее приравнивают A) или сумма платежа в будущем (ее приравнивают S) и требуется погасить этот долг с помощью ренты. Решив уравнения (5.12) и (5.13) относительно R_1 и a, получим первый член ренты

$$R_1=\frac{S+\frac{na}{i}}{s_{n;i}}-\frac{a}{i}; \qquad (5.14)$$

$$R_1=\frac{A+\frac{nav^n}{i}}{a_{n;i}}-\frac{a}{i}; \qquad (5.15)$$

абсолютный прирост

$$a=\frac{(A-R_1a_{n;i})i}{a_{n;i}-nv^n}; \qquad (5.16)$$

$$a=(S-R_1s_{n;i})\frac{i}{s_{n;i}-n}. \qquad (5.17)$$

Если абсолютный прирост равен первому члену ренты, т. е. $a=R_1$, то наращенная сумма

$$S=R_1\frac{(1+i)s_{n;i}-n}{i}; \qquad (5.18)$$

современная величина

$$A=R_1\frac{1-v^n+a_{n;i}-nv^n}{i}. \qquad (5.19)$$

Пример 5.5. Текущая задолженность равна 180 тыс. руб. Решено погасить ее путем периодических платежей в течение 8 лет по схеме возрастающей ренты, причем абсолютный прирост равен первому члену. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка 6% в год. Определить последовательные размеры платежей.

По условиям задачи сумма текущей задолженности $A=180\ 000$, $n=8$, $i=0{,}06$. Для получения ответа решим уравнение (5.19) относительно R_1. Получим

$$R_1=\frac{Ai}{1+a_{n;i}-(n+1)v^n}.$$

Величины $a_{n;i}$ и v^n по данным задачи имеют следующие значения: $a_{8;6}=6{,}2097938$; $1{,}06^{-8}=0{,}6274124$. Откуда

$$R_1=180\ 000\cdot\frac{0.06}{1+6{,}2097938-(8+1)\cdot 0{,}6274124}=6\ 909{,}42 \text{ руб.} \quad \#5$$

Базируясь на полученном результате, составим план погашения задолженности (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Номер платежа	Сумма платежа	Дисконтированная величина платежа
1	6909,42	6518,3
2	13818,85	12298,7
3	20728,28	17403,9
4	27637,70	21891,6
5	34547,13	25815,6
6	41456,55	29225,2
7	48365,97	32166,2
8	55275,40	34680,5
Итого		180000,0

5.3. Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи должны изменяться с постоянным приростом, то члены ренты будут представлять собой ряд, члены которого изменяются по геометрической прогрессии: $R, Rq, ..., Rq^{n-1}$. Величина t-го члена ренты равна Rq^{t-1}. Дисконтируем эти величины: $Rv, Rqv^2, ..., Rq^{n-1}v^n$. Получили геометрическую прогрессию с первым членом Rv и знаменателем qv. Сумма этих величин, очевидно, равна

$$A=Rv\frac{q^nv^n-1}{qv-1}=R\frac{q^nv^n-1}{q-(1+i)}. \quad (5.20)$$

Пусть теперь $q=1+k$, где k — темп прироста члена ренты. Тогда, после простых преобразований имеем

$$A=R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k}. \quad (5.21)$$

Наращенная сумма ренты составит

$$S=A(1+i)^n=R\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}. \quad (5.22)$$

$$S=R\frac{(1+k)^n-(1+i)^n}{k-i}. \quad (5.23)$$

Пример 5.6. По условиям контракта предполагается в конце каждого года выплачивать платежи, первый из них равен 200 тыс. руб., следующие платежи увеличиваются каждый раз на 20%. Срок — 6 лет. Найти современную величину и наращенную сумму такой ренты. Ставка процента — 5,5% годовых. Здесь $R=200$, $q=1,2$; $v^n=1,055^{-6}=0,72525$; $(1+i)^n=1,055^6=1,37883$. По формулам (5.20) и (4.31) находим:

$$A=200\cdot\frac{1,2^6\cdot 0,72524-1}{1,2-1,055}=1\,607,69;$$

$$S=1\,607,69\cdot 1,37883=2\,216,75 \text{ тыс. руб.}$$ #6

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются с постоянным темпом роста q, а проценты начис-

ляются раз в году. Тогда последовательность платежей представляет собой геометрическую прогрессию $R, Rq, ..., Rq^{np-1}$. Начислим проценты и суммируем результат, получим

$$S=R\frac{q^{np}-(1+i)^n}{q-(1+i)^{1/p}}. \quad (5.24)$$

Аналогично для современной величины находим

$$A=R\frac{q^{np}v^n-1}{q-(1+i)^{1/p}}. \quad (5.25)$$

Пример 5.7. Введем в условия предыдущего примера изменение: пусть член ренты выплачивается не один, а два раза в году, причем первый член равен 200/2, остальные условия остаются те же. В этом случае $p=2$ и согласно (5.25) и (4.31):

$$A=\frac{200}{2}\cdot\frac{1,2^{12}\cdot 0,72524-1}{1,2-1,055^{1/2}}=3\,162,13;$$

$$S=3\,162,13\cdot 1,055^6=4\,360,08 \text{ тыс. руб.}$$ #7

Изменение размера платежей может начинаться с первого члена их последовательности. Годовая рента представляет собой ряд $R_0q, R_0q^2, ..., R_0q^t, ..., R_0q^n$, где R_0 — базовый размер члена ренты. В этом случае наращенная сумма находится как

$$S=R_0\frac{q^{n+1}v-(1+i)^n}{qv-1}; \quad (5.26)$$

а современная величина

$$A=R_0\frac{(qv)^{n+1}-1}{qv-1}. \quad (5.27)$$

5.4. Непрерывные постоянные потоки платежей

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно — один или p раз в году. Что же касается начисления процентов, то в основном рассматривались ситуации, когда этот процесс тоже дискретен. Только в одном случае предполагалось, что проценты начисляются непрерывно, см. (4.15) и (4.28). Вместе с тем дискретные процессы, особенно в производственных системах, не являются единственно возможными. В ряде случаев более адекватное описание финансовых явлений достигается, когда поток платежей без большой потери точности воспринимается как непрерывный процесс. В таких случаях, например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом этот поток платежей можно рассматривать как непрервный, применяют непрерывные ренты. Концепция непрерывности в определенных условиях увеличивает возможности анализа. Особенно удобны непрерывные ренты при описании потоков платежей, члены которых изменяются по какому-либо заданному закону. Эффективно применение непрерывных переменных рент в количественном анализе сложных инвестиционнных операций.

Ниже обсуждаются методы количественого анализа постоянных и переменных непрерывных рент, капитализация процентов в которых осуществляется непрерывно или дискретно.

Постоянная непрерывная рента. Непрерывность применительно к рентам означает, что поступления на протяжении срока ренты происходят непрерывно, иначе говоря $p=\infty$. Найдем коэффициент приведения для такой ренты. Напомним, что для p-срочной ренты этот коэффициент рассчитывается как

$$a^{(p)}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)}.$$

Очевидно, что коэффициент приведения для непрерывной ренты с дискретным начислением процентов

$$\bar{a}_{n;i}=\lim_{p\to\infty}a^{(p)}_{n;i}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(1+i)^{1/p}-1}.$$

Непосредственная подстановка $p=\infty$ приводит к неопределенности

$$\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1}{(1+i)^{1/\infty}-1}=\frac{0}{0}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p((1+i)^{1/p}-1)}=\frac{1}{\ln(1+i)}.$$

После чего коэффициент приведения находится как

$$\bar{a}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (5.28)$$

Соответственно коэффициент наращения

$$\bar{s}_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}. \qquad (5.29)$$

Очевидно, что переход от дискретных взносов к непрерывным увеличивает коэффициенты приведения и наращения рент. Так

$$\bar{a}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)}a_{n;i},$$

$$\bar{s}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)}s_{n;i}.$$

Уже при годовой ставке 10% указанный прирост составит 4,92%.

Аналогичным путем найдем коэффициенты приведения непрерывной ренты при капитализации процентов m раз в году. В этом случае величина предела

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(1+i/m)^{m/p}-1}=\frac{1}{m\ln(1+i/m)}.$$

После чего

$$\bar{a}_{mn;i}=\frac{1-(1+i/m)^{-mn}}{m\ln(1+i/m)}; \qquad (5.30)$$

$$\bar{s}_{mn;i}=\frac{(1+i/m)^{mn}-1}{m\ln(1+i/m)}; \qquad (5.31)$$

В рассмотренных ситуациях платежи производятся непрерывно, а начисление процентов дискретно. Вероятно, более естественным будет положение, когда оба процесса непрерывны. Для получения соответствующих коэффициентов приведения и наращения воспользуемся соотношениями эквивалентности дискретных и непрерывных ставок: $\delta=\ln(1+i)$ и $i=e^{\delta}-1$. После чего можно сразу записать

$$\bar{a}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}=a_{n;\delta}. \qquad (5.32)$$

$$\bar{s}_{n;i}=\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}=\frac{e^{\delta n}-1}{\delta}=s_{n;\delta}. \qquad (5.33)$$

Равенства $\bar{a}_{n;i}=a_{n;\delta}$ и $\bar{s}_{n;i}=s_{n;\delta}$ справедливы только при условии, что ставки i и δ эквивалентны. Если же значения ставок равны $(i=\delta)$, то $\bar{a}_{n;i}>a_{n;\delta}$ и $\bar{s}_{n;i}<s_{n;\delta}$.

Заметим, что коэффициенты приведения и наращения (4.27) — (4.29) предполагают дискретные платежи и непрерывное начисление процентов, а коэффициенты (5.28) — (5.33) выведены для непрерывных потоков платежей.

Пример 5.8. Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1млн. руб. в год, продолжительность разработки 10 лет, доходы поступают непрерывно и равномерно в пределах года и на протяжении всего периода.

Общая наращенная сумма поступлений при начислении на них процентов из расчета 8% в год составит по формуле (5.29)

$$S=1\cdot\frac{1{,}08^{10}-1}{\ln 1{,}08}=15{,}06 \text{ млн. руб.}$$

Аналогичный результат получим на основе непрерывного процента, если силу роста найдем из условия эквивалентности $\delta=\ln 1{,}08=0{,}076961$. Откуда по формуле (5.33)

$$S=1\cdot\frac{e^{0{,}076961\cdot 10}-1}{0{,}076961}=15{,}06 \text{ млн. руб.}$$

Если бы поступления были дискретны (например, в конце каждого года), то согласно (3.1) получим

$$S=1\cdot s_{10;8}=14{,}486 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, непрерывный поток поступлений вместо платежей в конце года увеличивает наращенную сумму в $\frac{i}{\ln(1+i)}=\frac{0{,}08}{\ln 1{,}08}=1{,}03949$ раза, т. е. почти на 4%.

Немного изменим условие — пусть теперь предусматривается, что наращение производится по непрерывной ставке $\delta=0{,}08$. В этом случае по (5.33) находим $s_{10;8}=\frac{e^{0{,}08\cdot 10}-1}{0{,}08}=15{,}319262$ и

$$S=1\cdot 15{,}319=15{,}319 \text{ млн. руб.}$$

#8

Формулы для $a_{n;\delta}$ и $s_{n;\delta}$ можно получить и непосредственно. Рассуждаем следующим образом. Так как современная величина платежа,

равного 1 и выплачиваемого в момент t при непрерывном дисконтировании равна $e^{-\delta t}$, то современная величина ренты, выплачиваемой в бесконечно малые промежутки времени, составит

$$a_{n;\delta}=\int_0^n e^{-\delta t}dt=-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\Big|_0^n=\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}.$$

Остановимся на одном частном, но практически важном вопросе. Определим значение коэффициента наращения непрерывной ренты для годового интервала времени. Обозначим коэффициент p-срочной ренты для этого интервала как $s_1^{(p)}$. Его предел при $p\to\infty$ составит $\bar{s}_1=\frac{i}{\ln(1+i)}$. Разложим эту функцию в степенной ряд, ограничившись тремя первыми членами, получим

$$\bar{s}_1=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{12}i^2.$$

Близкий к этому результат дает и разложение бинома $(1+i)^{1/2}$.

$$(1+i)^{1/2}=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{8}i^2.$$

В итоге

$$\bar{s}_1\approx(1+i)^{1/2}. \tag{5.34}$$

Так как $(1+i)^{1/2}$ представляет собой множитель наращения за полгода, то есть основание утверждать, что непрерывная выплата в течение года некоторой суммы P приближенно эквивалентна разовой уплате этой же суммы в середине года. Аналогично находим

$$\bar{a}_1\approx(1+i)^{-1/2}. \tag{5.35}$$

Определение срока ренты. Исходной величиной при определении срока ренты является отношение наращенной за этот срок суммы ренты или современной ее величины к годовой сумме платежей (S/R или A/R). Приведем формулы для расчета n при условии, что проценты начисляются по годовой ставке i или силе роста δ:

срок ренты (годовая ставка i)

$$n=\frac{\ln(\ln(1+i)\cdot\frac{S}{R}+1)}{\ln(1+i)}; \tag{5.36}$$

$$n=\frac{-\ln(1-\ln(1+i)\cdot\frac{A}{R})}{\ln(1+i)};\qquad(5.37)$$

срок ренты (сила роста δ)

$$n=\frac{\ln(\delta\frac{S}{R}+1)}{\delta};\qquad(5.38)$$

$$n=\frac{-\ln(1-\delta\frac{A}{R})}{\delta}.\qquad(5.39)$$

Пример 5.9. За какой срок наращенная сумма вырастет в 5 раз по сравнению с годовой суммой взноса, если последние осуществляются непрерывно и равномерно? На взносы начисляются непрерывные проценты, сила роста равна 8%.

Здесь $S/R=5$, $\delta=0{,}08$, откуда

$$n=\frac{\ln(5\cdot 0{,}08+1)}{0{,}08}=4{,}21 \text{ года.}$$

#9

Определение ставки процентов. Величину ставки процентов i или δ для нерерывной постоянной ренты в зависимости от заданной величины коэффициента наращения или коэффициента приведения можно приближенно определить по формуле линейной интерполяции, а также с помощью метода Ньютона-Рафсона. В случае, когда для непрерывной ренты применяются ставки непрерывных процентов δ, оценка последней осуществляется по следующим итерационным формулам, полученным на основе метода Ньютона-Рафсона:

$$\delta_{k+1}=\delta_k-\frac{1-e^{-\delta_k n}-\frac{A\delta_k}{R}}{ne^{-\delta_k n}-\frac{A}{R}}=\delta_k\left(1-\frac{a_{n;\delta_k}-\frac{A}{R}}{ne^{-\delta_k n}-\frac{A}{R}}\right),\qquad(5.40)$$

где δ_k — значение силы роста на k-ой терации. Для того, чтобы $\delta>0$, необходимо соблюдение условия $n>A/R$. Первоначальное значение силы роста можно оценить, если нет других предварительных оценок, как $\delta_0=\frac{R}{A}-\frac{1}{2n}$.

Итеративный процесс продолжается до тех пор, пока разность $A-A_k$ не станет пренебрежимо мала, т. е. $|A-A_k|<e$.

Пример 5.10. Какова доходность инвестиций (в виде δ), равных 1 млн. руб., если отдача от них составляет ежегодно 200 тыс. руб.? Ожидается, что поступления равномерные, срок — 8 лет.

Зададимся допустимой ошибкой современной величины: $\varepsilon=0{,}5$ тыс. руб. Оценим первое значение силы роста $\delta_0=\frac{200}{1\,000}-\frac{1}{2\cdot 8}=0{,}14$. По формуле (5.40) находим:

$$\delta_1=0{,}14-\frac{1-e^{-0{,}14\cdot 8}-5\cdot 0{,}14}{8\cdot e^{-0{,}14\cdot 8}-5}=0{,}13.$$

$$\delta_2=0{,}13-0{,}0016=0{,}1284.$$

Проверка: по формуле (5.32) для $\delta=0{,}1284$ получим $a_{n;\delta}$, а затем рассчитаем $A=200\cdot a_{n;\delta}=999{,}98$ тыс. руб., т. е. заданная степень точности достигнута.

#10

5.5. Непрерывные переменные потоки платежей

Выше при анализе непрерывных потоков платежей предполагалось, что годовая сумма ренты R равномерно распределяется на протяжении года. Однако такой поток денежных поступлений не является единственно возможным. На практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток может существенно изменяться во времени, следуя какому-либо закону. Если этот поток непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t=f(t)$, то общая сумма поступлений за время n равна $\int_0^n f(t)dt$. В этом случае наращенная по непрерывной ставке за период от 0 до n сумма составит:

$$S=\int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt.\qquad(5.41)$$

Современная величина такого потока равна

$$A=\int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt.\qquad(5.42)$$

Для того, чтобы найти величины S и A, необходимо определить конкретный вид функции распределения платежей и значения ее параметров.

Ниже рассматриваются методы расчета современных величин двух видов функции распределения платежей — изменяющихся по линейному и экспоненциальному законам. Наращенные суммы этих рент легко получить, применив соотношение $S=Ae^{\delta n}$.

Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей. Используются формулы:

функция потока платежей

$$R_t=R_0+at,$$

где R_0 — начальная (базовая) величина платежа, выплачиваемого за единицу времени, в которой измеряется срок ренты.

Современная величина

$$A=\int_0^n (R_0+at)e^{-\delta t}dt=R_0\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}+\left(\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ne^{-\delta n}\right)\cdot\frac{a}{\delta}=$$

$$=(R_0+\frac{a}{\delta})a_{n;\delta}-\frac{a}{\delta}ne^{-\delta n}, \qquad (5.43)$$

где $a_{n;\delta}$ — коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты.

Пример 5.11. Намечается в течении трех лет увеличивать выпуск продукции на 1 млн. руб. ежегодно. Базовый уровень выпуска 10 млн. руб. Необходимо определить суммарный стоимостный объем выпуска с начисленными по ставке $\delta=0{,}08$ процентами. Находим современную величину этой ренты

$$A=(10+\frac{1}{0{,}08})\cdot a_{3;8}-\frac{3\cdot e^{-0{,}08\cdot 3}}{0{,}08}=29{,}5 \text{ млн. руб.};$$

а затем искомую характеристику

$$S=29{,}5\cdot e^{0{,}08\cdot 3}=37{,}5 \text{ млн. руб.}$$

При постоянной величине платежей ($R=R_0=10$) и непрерывном начислении процентов современная величина составит

$$A=R\cdot a_{3;0{,}08}=10\cdot 2{,}562=25{,}62 \text{ млн. руб.}$$ #11

Ставку процентов можно определить, если заданы все остальные параметры, с помощью метода Ньютона-Рафсона. Необходимые для применения этого метода функции имеют следующий вид:

$$f(\delta)=R_0(1-e^{-\delta n})+\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}-ane^{-\delta n}-A; \qquad (5.44)$$

$$f'(\delta)=n(R_0+an)e^{-\delta n}+(ne^{-\delta n}-\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta})\cdot\frac{a}{\delta}. \qquad (5.45)$$

Пример 5.12. Капиталовложения оцениваются в сумме 1 млн. руб., начальная отдача составит 300 тыс. руб. в год, она непрерывно увеличивается в течение 5 лет (по 10 тыс. в год). Какова доходность инвестиций, измеренная в виде непрерывной процентной ставки?

По условиям задачи: $A=1000$ тыс. руб., $R_0=300$ тыс. руб., $a=10$ тыс. руб., $n=5$. Пусть первая оценка ставки $\delta_0=0{,}16$. По формулам (5.44) и (5.45) находим $f(0{,}16)=17{,}5$ и $f'(0{,}16)=-288{,}4$, откуда

$$\delta_1=0{,}16-\frac{17{,}5}{-288{,}4}=0{,}2195.$$

Выполним еще одну итерацию: $f(0{,}2195)=-5{,}94$, $f'(0{,}2195)=-478{,}3$ и

$$\delta_2=0{,}2195-\frac{-5{,}94}{-478{,}3}=0{,}2071.$$

Проверка: определим современную величину ренты при условии, что сила роста $\delta=0{,}2071$. Получим по формуле (5.43) $A=998{,}9$. Допустим, такая точность нас не удовлетворяет. На следующей итерации находим: $f(0{,}2071)=-0{,}225$, $f'(0{,}2071)=-443{,}3$ и $\delta=0{,}2071-0{,}005=0{,}2066$. В этом случае $A=999{,}98$.

Показатель эффективности инвестиции в виде годовой процентной ставки находим как

$$i=e^{0{,}2066}-1=0{,}2249, \text{ т. е. } 22{,}49\%.$$ #12

Экспоненциальный поток платежей. Функция потока платежей

$$R_t=R_0e^{\gamma t}, \qquad (5.46)$$

где R_0 — начальная (базовая) величина платежа; выплачиваемая в единицу времени, в которой измеряется срок ренты; γ — непрерывный темп прироста.

Современная величина

$$A=R_0\int_0^n e^{\gamma t}e^{-\delta t}dt=R_0\cdot\frac{e^{(\gamma-\delta)n}-1}{\gamma-\delta}\cdot R_0 a_{n;\gamma-\delta}, \qquad (5.47)$$

где $\gamma-\delta$ — разность непрерывного темпа прироста и непрерывной процентной ставки; $\gamma-\delta=\ln\frac{1+q}{1+i}$.

Пример 5.13. Ожидается, что инфляция в будущем составит 5% в год. Какова современная величина потока платежей, члены которого определяются с поправкой на инфляцию? Параметры потока: $R_0=100$ тыс. руб., $i=7\%$, $n=3$ года; $\gamma-\delta=\ln\frac{1,05}{1,07}=-0,018868$;

$$A=100\cdot\frac{e^{-0,018868\cdot 3}-1}{-0,018868}=291,67 \text{ тыс. руб.}$$

Без корректировки платежей на инфляцию получим

$$\delta=\ln 1,07 \quad \text{и} \quad A=100\cdot\frac{1-e^{-(\ln 1,07)^3}}{\ln 1,07}=271,51 \text{ тыс. руб.} \qquad \#13$$

Ставка непрерывных процентов рассчитывается, если заданы остальные параметры, по итеративной формуле

$$\delta_{k+1}=\delta_k-\frac{e^{(\gamma-\delta_k)n}-\frac{A}{R_0}(\gamma-\delta)-1}{\frac{A}{R_0}-ne^{(\gamma-\delta_k)n}}.$$

Первоначальное значение ставки можно принять на уровне

$$\delta_0=\frac{R_0}{A}+\gamma-\frac{1}{n+1}.$$

Пример 5.14. Непрерывный поток платежей (отдача от инвестиций) характеризуется параметрами $R_0=300$ тыс. руб., $\gamma=5\%$, $n=5$ лет. Необходимо определить процентную ставку, которая уравнивает поток и капиталовложения в 1 млн. руб.

Приняв $A=1$ млн. руб. и установив первоначальное значение ставки на уровне $\delta_0=0,3+0,05-0,167=0,183$, находим

$$\delta_1=0,183-\frac{e^{(0,05-0,183)\cdot 5}-\frac{1000}{300}\cdot(0,05-0,183)-1}{\frac{1000}{300}-5e^{(0,05-0,183)\cdot 5}}=0,239.$$

При данном уровне ставки $A=9793$ тыс. руб., т. е. существенно меньше исходных 1 млн. руб., следующие итерации дают: $\delta_2=0,2256$, $\delta_3=0,2249$. Последняя оценка дает хорошее приближение, так как в этом случае $A=999,98$.

#14

5.6 Финансовые ренты в страховании (условные аннуитеты)

В преобладающем числе областей финансовой деятельности объектом приложения количественных методов анализа являются детерминированные процессы и только в страховании они распространяются на вероятностные процессы. Так, в личном страховании (страхование по старости, инвалидности, на случай смерти и т. д.) описание последовательности взносов страхователей, а также страховых выплат страховщиков производится в виде регулярных потоков платежей, аннуитетов. Однако эти аннуитеты имеют одну особенность — выплаты денег ставятся в зависимость от какого-либо условия. Они выплачиваются при жизни (или, наоборот, смерти) застрахованного. Заранее число платежей в этой последовательности неизвестно. Такие аннуитеты относятся к условным (contingent annuity). Условные аннуитеты играют ключевую роль в расчетах, связанных с личным и имущественным страхованием.

Согласно страховому договору страхователь имеет право получить сумму S при наступлении оговоренного в договоре события. В свою очередь он уплачивает страховщику страховой взнос или, как принято говорить, премию (premium). Если вероятность наступления события равна q, то теоретически премия определяется как

$$P=Sq.$$

Приведенное равенство иллюстрирует *принцип эквивалентности обязательств страхователя и страховщика.* В действительности премия несколько превышает величину Sq, так как включает помимо чистой премии и так называемые нагрузки — расходы по страхованию и доход страховщика от страховой деятельности. Покажем в общем виде, как реализуется этот принцип в страховании жизни при решении одной из важнейших задач, с которой сталкиваются в страховании, — расчете тарифной ставки. Обозначим через q_t — вероятность умереть в году t после начала страхования. Если страховое событие (пусть это будет смерть застрахованного) произойдет на первом году страхования, то страховщик получит сумму P (допустим, что премия выплачивается в начале каждого года), если на втором году, то страхователь выплатит за два года премии на сумму $2P$ и т. д. Математическое ожидание суммы премий составит

$$E(\sum P)=P(q_1+2q_2+\ldots+nq_n).$$

Нетрудно убедиться в том, что полученная величина хотя и обобщает все выплаты страхователя с учетом вероятности их выплат, однако при этом нарушается принцип временной ценности денег, так как суммируются денежные величины, выплачиваемые в разные моменты времени. С учетом фактора времени математическое ожидание суммы премий находится как

$$E(A)=P[q_1+(1+v)q_2+(1+v+v^2)q_3+\ldots+(1+v+v^2+\ldots+v^{n-1})q_t],$$

где v — дисконтный множитель по ставке i.

Обратимся теперь к выплате стаховой суммы. Предположим, что она выплачивается в конце года, тогда при наступлении страхового случая в первом году страхования математическое ожидание ее выплаты равно Sq_1, во втором — Sq_2 и т. д. Математическое ожидание выплаты с учетом дисконтирования в целом составит величину

$$E(S)=S(vq_1+v^2q_2+\ldots+v^nq_n).$$

Исходя из принципа эквивалентности обязательств страхователя и страховщика теперь можно записать $E(A)=E(S)$. Поскольку страховая сумма задана, то это равенство позволяет найти величину премии P. Например, если принять, что $S=1\,000$ руб., то P в этом случае будет означать теоретическую годовую тарифную ставку в расчете на 1 000 руб. страховой суммы.

Пусть теперь речь идет о имущественном страховании. В большинстве случаев можно полагать, что вероятности наступления страхового события здесь постоянны. Отсюда математическое ожидание суммы премий с учетом их дисконтирования составит

$$E(A)=P[q+(1+v)q+\ldots+(1+v+\ldots+v^{n-1})q] =$$

$$=Pq[n+\sum_{1}^{n-1}(n-t)v^t]=PqK\ .$$

В свою очередь математическое ожидание выплат страховых сумм находится как

$$E(S)=Sq\sum_{1}^{n}v^t=Sqa_{n;i}.$$

Из равенства $E(A)=E(S)$ находим значение тарифной ставки: $P=Sa_{n;i}/K$.

Математические ожидания $E(A)$ и $E(S)$ представляют собой современные величины специфических потоков платежей. В имущественном страховании $E(S)$ — современная величина постоянной ренты. Что же касается личного страхования, то таким простым путем получить величины $E(A)$ и $E(S)$ не удастся, так как вероятности q, как было показано выше, имеют различные значения для каждого возраста. В практике личного страхования применяется иной метод, который опять таки основан на расчете современных величин специальных условных аннуитетов.

Страхование жизни. допустим, что человек в возрасте x лет договаривается с некоторой страховой организацией о том, что при достижении им 60 лет он получит сумму S, так называемое страхование на дожитие. Для оценки стоимости такой страховки найдем математическое ожидание этой суммы, дисконтированной на срок $60-x$ лет.

$$E_x=q_{x,60}v^{60-x}.$$

Вероятность дожить до 60 лет ($q_{x,60}$) человеку в возрасте x лет находится как отношение l_{60}/l_x, где l_{60} и l_x — числа доживших до возраста 60 и x лет, содержащиеся в так называемой таблице смертности (mortality table).*

* *Таблица смертности представляет собой числовую модель процесса вымирания некой совокупности людей. Основное ее содержание - численности людей каждого возраста (lx), оставшиеся в живых из первоначальной совокупности, равной 100 тыс.человек, при некоторых заданных повозрастных коэффициентах смертности. Методы построения таблиц смертности рассматриваются в курсах демографии.*

Полученная величина E представляет собой *нетто-ставку* страхования на дожитие (pure endowment), т. е. ставку, определяемую из условия эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Она не включает расходов на ведение дела и прибыли страховщика. Вернемся к выражению математического ожидания выплаты. Заменим $q_{x,60}$ на l_{60}/l_x, после чего

$$E_x=S\frac{l_{60}}{l_x}v^{60-x}. \qquad (5.48)$$

Если речь идет не о разовой выплате стаховых сумм, а о некотором их ряде (например, выплате пенсии по старости), то искомое математическое ожидание находим как сумму

$$A_x=S(\frac{l_{60}}{l_x}v^{60-x}+\frac{l_{61}}{l_x}v^{61-x}+\ldots+\frac{l_\omega}{l_x}v^{\omega-x}), \qquad (5.49)$$

где ω — заданный предельный возраст. Рассматривая полученное выражение, нетрудно заметить, что оно дает оценку современной величине последовательности платежей с членом S, т. е. определяет стоимость этой пенсии для лица в возрасте x лет. Величина в скобках представляет собой специфический коэффициент приведения. Его можно охарактеризовать как сумму дисконтированных платежей, равных одному рублю, с учетом вероятности каждой выплаты. Такую последовательность называют аннуитетом страхования жизни (life annuity), или, кратко, *страховым аннуитетом*. Формула (5.49) и подобные ей выражения, которые можно вывести для других видов личного страхования, мало удобны для практических расчетов (в том числе и потому, что нельзя использовать стандартные коэффициенты приведения рент). В практике для существенного сокращения объема работ, связанных с расчетом тарифов, применяются так называемые *коммутационные функции* (commutation functions), на основе которых подсчитываются так называемые коммутационные числа. Последние делятся на две группы, в первой в основу положены числа живущих, во второй — числа умерших. И те и другие показатели берутся из таблицы смертности. Рассмотрим по два вида наиболее часто применяемых коммутационных функций из каждой группы (в страховой практике их значительно больше). В первой группе это функции D_x и N_x.

$$D_x=l_xv^x; \quad N_x=\sum_{j=\omega}^{x}D_j. \qquad (5.50)\ (5.51)$$

Значение D_x и N_x рассчитываются для принятого в конкретной страховой организации уровня процентной ставки. Воспользуемся этими функциями для вычисления математического ожидания выплаты — см. (5.48) и (5.49). Начнем с E_x. Умножим числитель и знаменатель на v^x, после чего

$$E_x=\frac{l_{60}v^{60}}{l_xv^x}S=\frac{D_{60}}{D_x}S. \qquad (5.52)$$

Таким образом, искомое значение математического ожидания (стоимость страхования на дожитие до 60 лет) находится как отношение двух коммутационных чисел на каждый рубль суммы страхования. Стоимость страхования пенсии (5.49) теперь можно рассчитать как

$$A_x=S\sum_{j=0}^{\omega}\frac{l_{60}v^{60+j}}{l_xv^x}=S\frac{N_{60}}{D_x}, \qquad (5.53)$$

где $N_{60}=\sum_{j=60}^{\omega}D_j$. Величина A_x представляет собой ту единовременную сумму, которую нужно внести в возрасте x лет с тем, чтобы получать пенсию, начиная с 60 лет. Этих средств достаточно для того, чтобы обеспечить выплату оговоренной суммы S с учетом вероятности дожития.

Величины D_x и N_x зависят от принятой ставки процентов. Причем, поскольку страховые договоры, как правило, охватывают значительные временные интервалы, то влияние ставки на стоимость страхования имеет решающее значение. Для иллюстрации приведем следующие данные о стоимости пожизненной пенсии (в 1000 руб. в год) для мужчин в зависимости от уровня ставки. Пенсия выплачивается с 60 лет. Нетто-ставки подсчитаны по данным таблицы смертности мужчин в СССР в 1987г.

Чем выше ставка, тем ниже тариф страхования и оно более привлекательно для клиента. Однако, при этом повышается риск для страховщика — он обязан обеспечить доходность аккумулируемых средств на уровне не ниже ставки процентов, принятой при расчете нетто-ставки.

В таблице 5.3 приводятся фрагменты таблицы коммутационных чисел D_x и N_x. Таблица построена на основе данных таблицы смертности мужского населения СССР в 1987г. Дисконтирование осуществляется по ставке 9%.

Таблица 5.2.

Нетто-ставки на 1000 руб. пожизненной пенсии в год.

Возраст	Ставка процентов			
	4	6	10	12
20	1405	571	102	45
30	2141	1052	274	144
40	3341	1986	748	472
50	5510	3964	2162	1633

Таблица 5.3

Коммутационные числа (мужчины, $i = 9\%$)

Возраст, x	Численность, l_x	D_x	N_x
20	100000	17843	204627
21	99800	16337	186784
. . .			
40	92639	2949	30469
41	91981	2687	27520
. . .			
50	83923	1129	10492
. . .			
60	68727	390	3086
61	66755	348	2695
. . .			
65	58092	214	1521
. . .			
85	9561	6	11
86	7961	5	5

Пример 5.15 Определим единовременную нетто-ставку для мужчины в возрасте 40 лет, который страхуется на дожитие до 60 лет. Необходимые для расчета данные возьмем из таблицы 5.3.

$$E_{40}=D_{60}/D_{40}=390/2949=0,1322,$$

т. е. за каждый рубль выплаты при достижении 60 лет необходимо в 40 лет заплатить 13,22 коп.

Продолжим пример. Найдем теперь сумму единовременной нетто-ставки пожизненной пенсии для мужчины в возрасте 40 лет. Пенсия выплачивается с 60 лет. В этом случае

$$A_{40}=N_{60}/D_{40}=3086/2949=1,0464,$$

т. е. на каждый рубль годовой пенсии необходим разовый взнос 1,0464 руб. #15

Выше мы полагали, что пенсия выплачивается пожизненно. Возможен, однако, такой договор страхования, когда предусматривается выплата пенсии с 60 лет в течение некоторого оговоренного срока m. Соответственно вместо (5.49) получим

$$A_x=S\left(\frac{l_{60}}{l_x}v^{60-x}+\ldots+\frac{l_{60+m}}{l_x}v^{60+m}\right)=\frac{S}{D_x}\sum_x^{x+m}D_j.$$

Необходимую сумму $\sum D_j$ можно получить как разность N_x-N_{x+m}, откуда

$$A_x=\frac{N_{60}-N_{60+m}}{D_x}S. \qquad (5.54)$$

Как правило, стахование пенсии предусматривает возможность рассрочки платежей вместо уплаты единовременной премии. Допустим взносы выплачиваются n лет (в начале каждого года), начиная с возраста x лет. В этом случае современная величина взносов составит

$$A_x=S\left(\frac{l_x}{l_x}+\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\ldots+\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n\right)=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}.$$

Если пенсия пожизненная, то

$$P=\frac{N_{60}}{N_x-N_{x+n}}. \qquad (5.55)$$

В случае, когда пенсия срочная, получим

$$P=\frac{N_{60}-N_{60+m}}{N_x-N_{x+n}}. \qquad (5.56)$$

Пример 5.16. Продолжим пример 5.15. Пусть теперь пенсия выплачивается только 5 лет. Тогда единовременная премия в 40 лет составит

$$A_{40}=\frac{N_{60}-N_{65}}{D_{40}}=\frac{3086-1521}{2949}=0,5307,$$

т. е. за каждый рубль годовой пенсии необходим взнос, равный 53,07 коп.

Посмотрим теперь чему будет равна годовая премия при пожизненной пенсии и рассрочке на 10 лет. По формуле (5.55) находим

$$P=\frac{N_{60}}{N_{40}-N_{50}}=\frac{3086}{30469-10492}=0{,}1545$$

(напомним, что при единовременном взносе потребуется 1,0464 руб. на рубль годовой пенсии).

Допустим теперь, что договор страхования предусматривает срочную пенсию на 5 лет и рассрочку выплат премии на 10 лет, тогда

$$P=\frac{N_{60}-N_{65}}{N_{40}-N_{50}}=\frac{3086-1521}{30469-10492}=0{,}0783.$$ #16

Обратимся теперь к страхованию на случай смерти. Пусть страховая сумма выплачивается в конце года, в котором наступило страховое событие. Тогда математическое ожидание выплаты страховой суммы определяется следующим образом

$$A=S\left(\frac{d_x}{l_x}v+\frac{d_{x+1}}{l_x}v^2+\ldots+\frac{d_\omega}{l_x}v^{\omega-x}\right),$$

где d_x — число умерших в возрасте x лет. Отношение d_x/l_x — вероятность наступления страхового события, а сумма в скобках — коэффициент приведения ренты, в которой дисконтированные платежи в размере 1 руб. суммируются с учетом вероятности их выплат. Умножим и разделим каждый член этой суммы на v^x , после чего

$$A=S\left(\frac{d_x}{D_x}v^{x+1}+\frac{d_{x+1}}{D_x}v^{x+2}+\ldots+\frac{d_\omega}{D_x}v^{\omega}\right).$$

Применим теперь коммутационные функции C_x и M_x.

$$C_x=d_x v^{x+1};M_x=\sum_{j=\omega}^{x}C_j. \qquad (5.57)\,(5.58)$$

После чего

$$A=S\frac{M_x}{D_x}. \qquad (5.59)$$

Аналогичным путем можно вывести формулы нетто-премии для различных вариантов страхования на случай смерти и других видов

личного страхования — на случай инвалидности и смешанного страхования, т. е. страхования, предусматривающего несколько разновидностей личного страхования. При выводе этих формул, разумеется должны быть приняты во внимание конкретные условия страхования, принятые в данной страховой организации. Например, при страховании пенсии может предусматриваться минимальный срок (скажем, 5 лет) для накопления резерва для выплаты пенсии и т. д. Важным моментом является адекватное определение вероятностей наступления страхового случая, необходимых для определения соответствующих условных аннуитетов при смешанном страховании.

ГЛАВА 6. КОНВЕРСИЯ АННУИТЕТОВ

6.1. Простые конверсии

В практике иногда сталкиваются со случаями, когда наобходимо изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов. Иначе говоря, необходимо *конвертировать* ренту. В самом простом случае изменение условий ренты заключается в замене ренты единовременным платежом. В более сложных случаях рента с одним набором условий заменяется рентой с другими условиями. Наконец, несколько рент могут быть объединены в одну (например, при консолидировании долгов, каждый из которых погашается с помощью ренты). Ясно, что указанные изменения рент не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия рент не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих в соглашении сторон, то она должна основываться на принципе финансовой эквивалентности, с которым мы уже сталкивались выше. Рассмотрим каждый из рассмотренных выше видов изменения рент, начиная с самого простого.

Выкуп ренты. Иногда распределенные во времени платежи (например, взносы, отчисления и т. д.) требуется заменить единовременным платежом. Такая замена является, по существу, выкупом ренты. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при подобного рода замене вместо ренты выплачивается современная (приведенная) ее величина. Естественно, что применяемая процентная ставка должна удовлетворять обе стороны, участвующие в операции.

Рассрочка платежей. Частый случая конверсии — замена единовременного платежа аннуитетом. Например, в коммерческом кредите плата за отгруженную продукцию, как правило, распределяется во времени. Удобно в этом случае рассрочку осуществить в виде аннуитета. Очевидно, что для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Поскольку современная величина такой ренты задана, то задача, возникающая при рассрочке платежа, заключается в определении члена ренты или числа ее членов (срока). Эта задача уже обсуждалась в 4.4, поэтому ограничимся одним примером.

Пример 6.1. Цена партии продукции — 1 млн. руб. уплачивается в рассрочку в течение 3 лет, кредит предоставляется из 10% годовых. Платежи производятся по полугодиям. Таким образом, рассрочка предполагает выплату ренты с параметрами $A=1$ млн. руб., $p=2$, $m=1$, $i=10\%$. Предположим, что покупателю предоставлена отсрочка на 3

месяца, причем проценты за время отсрочки присоединяются к цене. Задача, следовательно, сводится к рассчету суммы члена ренты. Находим цену товара на конец периода отсрочки:

$$A\cdot 1{,}1^{3/12}=1024{,}11 \text{ тыс. руб.}$$

Эта сумма будет погашена рентой с членом, равным (см.4.4)

$$R=\frac{1024{,}11}{\dfrac{1-1{,}1^{-3}}{2\cdot(1{,}1^{1/2}-1)}}=401{,}999 \text{ тыс. руб.} \qquad \#1$$

Пусть теперь член ренты задан, тогда задача сводится к определению срока n. Для этого сперва рассчитаем коэффициент приведения $a_{n;i}$, напомним, что $a_{n;i}=A/R$, а затем найдем искомый срок n. Аналогичный подход применяется и для других видов рент. Методы рассчета n по заданному отношению A/R рассмотрены в 4.4.

6.2. Изменение параметров ренты

Изменение условий ренты фактически означает замену одной ренты другой. Если замена рент осуществляется при соблюдении принципа финансовой эквивалентности, то из этого непосредственно следует, что современные величины обеих этих рент (обозначим их как A_1 и A_2) должны быть равны, т.е. $A_1=A_2$. Исходя из этого равенства можно найти необходимые характеристики заменяющей ренты. Рассмотрим несколько случаев замены рент, причем, поскольку изменение ставки процента, по существу, приводит к изменению финансовых отношений сторон, то далее в большинстве случаев полагаем, что ставка процентов не меняется.

Замена немедленной ренты на отсроченную. Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n и i. Необходимо заменить ее на отсроченную на t лет ренту. Иными словами, начало ренты сдвигается на t лет. Если новая рента имеет продолжительность n_2, то задача заключается в определении R_2, и наоборот, если R_2 задается (например, $R_2=R_1$), то следует определить n_2. Рассмотрим первую задачу при условии, что $n_1=n_2=n$. Современные величины немедленной и отсроченной ренты составят $A_1=R_1a_{n;i}$; $A_2=R_2a_{n;i}v^t$. Принимая во внимание, что $A_1=A_2$, получим

$$R_2=\frac{R_1}{v^t}=R_1(1+i)^t. \tag{6.1}$$

Иными словами, член отсроченной ренты при всех прочих равных условиях равен наращенному члену немедленной ренты. Для рент с начислением процентов m раз в год это означает

$$R_2=\frac{R_1}{v^{tm}}=R_1(1+i/m)^{tm}.$$

В общем случае, когда $n_1 \neq n_2$, имеем

$$R_2=\frac{A_1(1+i)^t}{a_{n_2;i}}=R_1\left(\frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}}\right)(1+i)^t. \tag{6.2}$$

Пример 6.2. Пусть рента с условиями: $R_1=2000$ руб., $i=0{,}08$, $n=5$ откладывается на три года, причем согласно договоренности продолжительность ренты не изменяется. Найти размер годового платежа. По формуле (6.1) находим

$$R_2=2000\cdot 1{,}08^3=2519{,}42 \text{ руб.}$$ #2

Перейдем к другой постановке задачи. Пусть член ренты остается без изменения, т. е. $R_2=R_1$, искомой является величина n_2. Отправляясь от равенства $Ra_{n_1;i}=Ra_{n_2;i}v^t$, находим

$$n_2=\frac{-\log(1-(1-(1+i)^{-n_1})(1+i)^t)}{\log(1+i)}. \tag{6.3}$$

Полученное по этой формуле число лет ренты, как правило, будет дробным. Поэтому для точной замены разницу, образующуюся в связи с тем, что она выплачивается за целое число лет, необходимо погасить каким-либо путем — см.4.4.

Пример 6.3. Ренту предыдущего примера следует отложить на 3 года без изменения члена ренты. Найти продолжительность заменяющей ренты. Для решения задачи воспользуемся формулой (6.3). Находим

$$n_2=\frac{-lg(1-(1-1{,}08^{-5})\cdot 1{,}08^3)}{lg1{,}08}=6{,}689 \text{ года.}$$

Пусть продолжительность заменяющей ренты равна 6 годам. Тогда современная величина составит

$$A_2=Ra_{6;8}v^3=2000\cdot 4{,}62288\cdot 1{,}08^{-3}=7339{,}58 \text{ руб.}$$

В то же время современная величина заменяемой ренты равна 7985,42 руб. Разность, таким образом, составляет 645,84 руб. Эту сумму следует уплатить в начале первого периода заменяемой ренты или с соответствующим наращением в любой другой момент.

#3

В случае, когда $R_1 \neq R_2$, искомую величину n_2 определяем по выведенным в гл.4 формулам (4.34)-(4.38).

Изменение продолжительности и срочности ренты. Пусть имеется годовая обычная рента. Она заменяется рентой с тем же условием, однако, вместо срока n_1 у новой ренты срок n_2. В этом случае $R_1a_{n_1;i}=R_2a_{n_2;i}$ и

$$R_2=\frac{R_1a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}}=R_1\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}. \tag{6.4}$$

Аналогично находится член ренты для других видов рент.

Пример 6.4. Вернемся к примеру 6.1. Пусть теперь отсрочка ренты сопровождается сокращением ее срока, скажем, до 4 лет. Тогда из равенства

$$R_1a_{n_1;i}=R_2a_{n_2;i}v^t$$

находим

$$R_2=R_1\frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}}(1+i)^t=2000\cdot\frac{a_{5;8}}{a_{4;8}}\cdot 1{,}08^3=2000\cdot\frac{3{,}9927101}{3{,}3121684}\cdot 1{,}08^3=$$

$$= 3037{,}08 \text{ руб.}$$ #4

Аналогичный метод применяется и при изменении срочности ренты (числа выплат в году). В силу финансовой эквивалентности $R_1a_{n;i}^{(p_1)}=R_2a_{n;i}^{(p_2)}$, где p_1 и p_2 — характеристики срочности двух рент. На основе этого равенства находятся искомые параметры R_2 или n_2. Например, в случае, когда сроки не изменяются, т. е. $n_1=n_2=n$, получим

$$R_2=\frac{R_1 a_{n;i}^{(p_1)}}{a_{n;i}^{(p_2)}}=R_1\frac{p_2((1+i)^{1/p_2}-1)}{p_1((1+i)^{1/p_1}-1)}.$$

В частности, когда заменяется годовая рента ($p_1=1$),

$$R_2=\frac{R_1 p_2((1+i)^{1/p_2}-1)}{i}.$$

Общий случай замены ренты. В общем случае, т. е. когда изменении подлежит не одна, а несколько характеристик ренты, исходим из равенства

$$A_1=\frac{R_2(1-(1+j_2/m_2)^{-m_2 n_2})}{p_2((1+j_2/m_2)^{m_2/p_2-1})},$$

где A_1 — современная величина заменяемой ренты. Заметим, что если это равенство будет соблюдено при замене рент, но действительная ставка процентов изменится, то финансовые отношения сторон также изменятся. Поэтому в полном смысле эквивалентность рент будет только в том случае, если $(1+\frac{j_1}{m_1})^{m_1}=(1+\frac{j_2}{m_2})^{m_2}$. Однако возможны случаи, когда при замене ренты стороны идут на изменение действительной или эффективной ставки процентов. Тогда финансовая эквивалентность рент будет определяться написанным выше равенством, из которого следует, что

$$R_2=A_1:\frac{1-(1+j_2/m_2)^{-m_2 n_2}}{p_2((1+j_2/m_2)^{m_2/p_2}-1}.$$

Пример 6.5. Рента с характеристиками: $n_1=5$, $j_1=0{,}06$, $p_1=4$ и $m_1=2$ заменяется на ренту, у которой $n_2=8$, $j_2=0{,}08$, $m_2=2$ и $p_2=2$. Если ежегодная сумма членов ренты равна 1000, то для новых условий

$$R_2=1000\cdot\frac{1-1{,}03^{-10}}{4\cdot(1{,}03^{2/4}-1)}:\frac{1-1{,}04^{-16}}{2\cdot 0{,}04}=737{,}51.$$

Таким образом, член новой ренты равен $\frac{737{,}51}{2}=368{,}76.$

#5

6.3. Объединение рент

Особым случаем замены рент является объединение (консолидация) рент в одну. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует

$$A=\sum_q A_q,$$

где A — современная величина заменяющей ренты, A_q — современная величина q-ой ренты, $q=1, \ldots, k$.

При объединении рент могут встретиться самые различные постановки задач. Основные из них: а) определение размера члена заменяющей ренты, б) определение продолжительности заменяющей ренты. И в том и в другом случае все характеристики, кроме искомой, заданы. Рассмотрим несколько случаев объединения рент при условии, что начало их срока совпадает. Если моменты начала рент не совпадают во времени, то, дисконтируя их современные величины на начало самой ранней ренты, получим необходимые для объединения рент значения современных величин.

Если современная величина заменяющей ренты равна $Ra_{n;i}$, то член заменяющей ренты находим как

$$R=\frac{\sum A_q}{a_{n;i}}. \tag{6.5}$$

Рассмотрим несколько частных случаев подобной замены. Прежде всего допустим, что заменяемые ренты различаются между собой членами ренты и продолжительностью. Пусть все консолидируемые ренты годовые с начислением процентов в конце года. Тогда из (6.5) следует

$$R=\frac{1}{a_{n;i}}\sum_q R_q a_{n_q;i_q}, \tag{6.6}$$

где n_q — продолжительность q-ой ренты.

Пример 6.6. Необходимо объединить ренты (немедленные, годовые, с начислением процентов в конце периодов; их характеристики показаны в табл.6.1) одной отложенной на 3 года рентой.

Заменяющая рента имеет следующие характеристики: $n=10$, $i=0{,}06$. Определим коэффициент приведения для заменяющей ренты. Находим

Таблица 6.1

Рента q	R_q	n_q	i_q	$a_{n_q;i_q}$	$R_q a_{n_q;i_q}$
1	1000	10	0,06	7,36009	7360,09
2	500	8	0,05	6,46321	3231,61
3	2000	12	0,05	8,86325	10635,90
Итого					21227,60

$$a_{10;6}v^3=7{,}3601\cdot 1{,}06^{-3}=6{,}1797.$$

Ставки процента у объединяемых рент здесь разные, поэтому обратимся к общей формуле (6.6). В соответствии с ней член новой ренты составит $R=\dfrac{21227{,}60}{6{,}1797}=3436{,}07$ руб.

Если бы заменяющая рента была немедленной, то

$$R=\frac{21227{,}60}{7{,}3601}=2884{,}15 \text{ руб.}$$

#6

Другая возможная постановка задачи при объединении рент заключается в определении числа членов заменяющей ренты или ее срока. Так беря за основу равенство (6.5), находим

$$a_{n;i}=\frac{\sum A_q}{R}. \tag{6.7}$$

Для других видов рент получим аналогичные соотношения: $a_{mn;j/m}=\dfrac{1}{R}\cdot\sum A_q$ и т. д. Пусть задача состоит в определении продолжительности заменяющей ренты при заданных значениях члена и ставки процентов заменяющей ренты с параметрами R и i. В самом простом случае, когда рента годовая ($p=m=1$) из (6.7) следует

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{\sum R_q a_{n_q;i_q}}{R}. \tag{6.8}$$

Таким образом, задача сводится к расчету n по $a_{n;i}$ (см.4.4).

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть число рент равно k, члены рент одинаковые. Тогда $R=kR_q$ и

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=R_q\frac{\sum a_{n_q;i_q}}{kR_q}=\frac{1}{k}\cdot\sum\frac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}. \tag{6.9}$$

Следовательно,

$$n=\frac{-\ln\left(\frac{1}{k}\sum\frac{1-(1+i_q)^{-n_q}}{i_q}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{6.10}$$

Допустим теперь, что у всех рент одинаковые ставки процентов, $i_1=i_2=\ldots=i$, тогда выражение (6.9) упрощается:

$$(1+i)^{-n}=\frac{\sum(1+i)^{-n_q}}{k}.$$

Таким образом,

$$n=\frac{\ln k-\ln\sum(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \tag{6.11}$$

Пример 6.7. Пусть имеются три годовых ренты с разными сроками. Член ренты каждой из них равен 1000 руб. Кроме того, известно, что $i=0{,}05$, $n_1=10$, $n_2=5$, $n_3=12$. Следует объединить эти ренты в одну при условии, что $R=3000$, $i=0{,}05$. Задача заключается в определении числа членов. По формуле (6.11) находим

$$n=\frac{\ln 3-\ln(1{,}05^{-10}+1{,}05^{-5}+1{,}05^{-12})}{\ln 1{,}05}=8{,}78.$$

Округляем срок до 8 лет и производим компенсацию разности в сумме современных величин.

#7

Обратимся теперь к случаю, когда $R=\sum R_q$, но $R_1\neq R_2\neq R_3$. Остальные условия: $n_1\neq n_2\neq n_3$, единая ставка процентов для всех рент, равная i. Очевидно, что в этих условиях логично вернуться к соотношению (6.7), которое после некоторых упрощений будет иметь вид

$$(1+i)^{-n}=\frac{\sum R_q(1+i)^{n_q}}{R}.$$

Решив его относительно n, получим

$$n=\frac{\ln R-\ln\sum R_q(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \qquad (6.11)$$

Пример 6.8. Пусть условия задачи те же, что и в предыдущем примере, за исключением того, что у заменяемых рент следующие характеристики членов: $R_1=500$, $R_2=1500$, $R_3=1000$. Тогда в соответствии с (6.11) имеем

$$n=\frac{\ln 3000-\ln(500\cdot 1{,}05^{-10}+1500\cdot 1{,}05^{-5}+1000\cdot 1{,}05^{-12})}{\ln 1{,}05}=7{,}761.$$

#8

В случае, когда несколько рент заменяются одной, причем $R=\sum R_q$, и известно $\sum A_q$, необходимо воспользоваться формулой (6.7), решив которую относительно n, получим

$$n=\frac{-\ln(1-i\frac{\sum A_q}{R})}{\ln(1+i)}. \qquad (6.12)$$

Из этой формулы следует, что для того, чтобы задача имела решение, необходимо при подборе параметров заменяющей ренты соблюдать условие $i\frac{\sum A_q}{R}<1$.

Пример 6.9. Пусть $A_1=1000$, $A_2=2000$, $A_3=3000$. Для заменяющей ренты выбраны условия: $R=700$, $i=0{,}10$. Тогда

$$n=\frac{-\ln(1-0{,}10\cdot\frac{6000}{700})}{\ln 1{,}1}=20{,}4.$$

#9

Рассмотренные варианты объединения рент, естественно, не охватывают все возможные случаи. Как было показано, каждый раз нетрудно вывести соответствующую формулу для определения искомой характеристики ренты, отправляясь от равенства современных стоимостей рент.

РАЗДЕЛ III. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

ГЛАВА 7. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ

7.1. Расходы по обслуживанию долга

Можно выделить по крайней мере три цели для количественного анализа долгосрочной задолженности (для краткости далее любой вид долгосрочной задолженности будем называть займом):

- достижение полной сбалансированности займа, т. е. адекватности его параметров принятым условиям финансового соглашения,
- оценка стоимости займа на любой момент его жизни с учетом всех будущих поступлений по нему и состоянием денежного рынка на момент оценивания,
- определение эффективности (доходности) финансовой операции для кредитора.

В данной главе основное внимание уделяется первой из поставленных проблем. Остальные обсуждаются в следующих главах.

Достижение сбалансированности параметров осуществляетсятся путем планирования погашения займа, которое заключается в определении периодических расходов, связанных с ним. Такие расходы обычно называют *обслуживанием долга* (debt service). Разовую сумму обслуживанию долга называют *срочной уплатой.* Срочные уплаты охватывают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга. Методы определения размера срочных уплат зависят от условий займа, долгосрочного кредита, ссуды. Эти условия предусматривают срок, продолжительность льготного периода (grace period), уровень процентной ставки, метод погашения и уплаты процентов и основной суммы долга. Проценты обычно выплачиваются на протяжении всего срока займа. Однако иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма долга чаще всего погашается частями (равными или изменяющимися срочными уплатами, равными суммами погашения долга и т. д.), иногда в конце срока. В льготном периоде основная сумма долга не погашается, проценты обычно выплачиваются, а иногда присоединяются к основной сумме долга.

Примем следующие обозначения:

D — сумма задолженности;

I — проценты по займу;

L — продолжительность льготного периода;

R — годовые расходы по погашению основного долга;

g — ставка процентов по условиям займа;

Y — срочная уплата.

В периоде, когда погашается основная сумма долга, срочная уплата состоит из двух элементов: $Y=I+R$. В льготном периоде она содержит только сумму выплачиваемых процентов (если это предусмотрено условиями): $Y=I$.

Методы расчета I и R существенно зависят от вида займа. Поэтому кратко остановимся на классификации. Наиболее важным классификационным признаком является метод погашения займа. По этому признаку можно выделить:

1) займы без обязательного погашения (например, «вечные облигации», perpetual bonds). Заемщик (обычно государство) обязывается выплачивать кредитору в определенные сроки доход в виде фиксированного процента; занятая сумма не возвращается. Вместе с тем, заемщик оставляет за собой право погасить (выкупить) все выпущенные долговые обязательства в любое время. Такой заем можно рассматривать как вечную ренту. Формулы, полученные при анализе этой ренты (см. главу 4), пригодны для анализа данного вида займа;

2) займы с обязательным погашением в один срок. Заемщик возвращает занятую сумму в оговоренный срок и, кроме того, выплачивает проценты (периодически или в конце срока);

3) займы с обязательным погашением в несколько сроков. Заемщик возвращает занятую сумму по частям и регулярно выплачивает доход от займа в виде процентов.

Ниже обсуждаются методы разработки планов погашения двух последних видов займа. Расчет срочных уплат для вечных займов не затрагивается, так как никаких проблем здесь не возникает.

7.2. Формирование фонда

Если по условиям займа заемщик обязуется возвратить в конце обусловленного срока сумму долга в виде разового платежа, то он, очевидно, должен предпринимать меры для обеспечения этого. При значительной сумме долга обычная мера заключается в создании *погасительного фонда* (sinking fund). Необходимость создания погасительного фонда иногда оговаривается в договоре выдачи займа. Такой фонд формируется из последовательных взносов (например, на специальном счете в банке), на которые начисляются проценты. Сумма взносов и начисленных процентов, накопленных в погасительном фонде, должна быть равна сумме долга на момент его уплаты. Строго говоря, создание фонда не обязательно надо связывать с погашением долга.

Нельзя исключить возможность просто накопления средств в заданном размере для иных целей. Метод расчета в общем остается тот же, что и для погасительного фонда. Далее обсуждаются методы расчета погасительных фондов при постоянных и переменных срочных уплатах.

Планирование погасительного фонда (постоянные срочные уплаты). Как было сказано выше, задача разработки плана погашения долга, в том числе и в виде погасительного фонда, заключается в определении размера срочной уплаты и составляющих ее элементов в зависимости от конкретных условий займа.

Итак, пусть накопление средств производится путем регулярных ежегодных взносов R, на которые начисляются сложные проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов, начисляемых на долг по ставке g. В этом случае срочная уплата составит

$$Y=Dg+R. \tag{7.1}$$

Поскольку фонд должен быть накоплен за срок, равный N лет, соответствующие платежи образуют ренту с параметрами R, N, i. Так как накопленная сумма такой ренты равна D, то согласно (4.1), получим $R=D/s_{N;i}$ и, следовательно,

$$Y=Dg+D/s_{N;i}=D(g+1/s_{N;i}). \tag{7.2}$$

Если условия финансового обязательства предусматривает вместо периодической выплаты процентов их присоединение к сумме основного долга, то срочная уплата содержит один элемент и определяется как

$$Y=\frac{D(1+g)^n}{s_{N;i}}, \tag{7.3}$$

где n — общий срок займа, $n=N+L$.

Пример 7.1. Долг в сумме 100 тыс. руб. выдан под 10% годовых на 5 лет. Для его погашения единовременным платежом создается фонд. На размещаемые в нем средства начисляются проценты (11% годовых). Необходимо найти ежегодные расходы должника (срочные уплаты). Пусть погасительный фонд создается одновременно с получением ссуды, причем в погасительный фонд ежегодно вносятся равные суммы. Такая операция характеризуется следующими параметрами: $D=100$, $g=10\%$, $i=11\%$, $n=N=5$, $s_{5;11}=6{,}22780141$. Если взносы выплачиваются ежегодно, то срочные расходы на протяжении пяти лет составят:

$$Y=100\cdot 0{,}1+\frac{100}{6{,}22780141}=10+16{,}057=26{,}057 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть условия контракта предусматривают присоединение процентов к основной сумме долга. Тогда согласно (7.3) получим

$$Y=\frac{100\cdot 1{,}1^5}{6{,}22780141}=25{,}86 \text{ тыс. руб.}$$

т. е. несколько меньше, чем при предыдущем варианте условий. #1

Итак, при создании погасительного фонда фигурируют две ставки процентов — i и g. Первая определяет скорость роста суммы погасительного фонда, вторая — сумму выплачиваемых за заем процентов. Нетрудно догадаться, что рассматриваемая форма погашения займа — создание погасительного фонда — выгодна должнику, если $g<i$, так как в этом случае должник на аккумулируемые в погасительном фонде средства получает больше процентов, чем выплачивает сам за заем.

Накопленные за t лет суммы фонда рассчитываются по уже знакомым формулам наращенных сумм постоянных рент — см. 4.2 или рекуррентно

$$S_{t+1}=S_t(1+i)+R. \qquad (7.4)$$

Пример 7.2. Продолжим пример 7.1. Пусть теперь формирование фонда происходит в последние четыре года. В первом году уплачиваются только проценты, тогда

$R=\frac{100}{s_{4;11}}=\frac{100}{4{,}779327999}=20{,}923$ тыс. руб. План формирования фонда представлен в таблице в таблице 7.1.

Таблица 7.1.

Год	Выплата процентов	Взносы в погасительный фонд	Расходы по займу	Накопление на конец года
1	10 000	-	10 000	-
2	10 000	20 923	30 923	20 923
3	10 000	20 923	30 923	44 358
4	10 000	20 923	30 923	70 604
5	10 000	20 923	30 923	100 000

#2

Формулы (7.2) и (7.3) получены для ежегодных взносов и начислений процентов. Если это не так, то применяются соответствующие методы расчета I и R.

Пример 7.3. Внесем еще одно изменение в условия примера 7.1: взносы вносятся не ежегодно, а в конце каждого месяца, т. е. $p = 12$. Проценты кредитору выплачиваются ежегодно. Тогда ежегодная сумма взносов составит $R=\frac{100}{s_{5;11}^{(12)}}=\frac{100}{3{,}878721402}=25{,}78169$, а сумма ежемесячного взноса — 2,148 тыс. руб. Таким образом, срочные уплаты в конце каждого года $Y=10+2{,}148=12{,}148$ тыс. руб. и в конце каждого месяца (кроме последнего в годовом периоде) $Y=2{,}148$ тыс. руб.

#3

Одним из практических примеров применения продемонстрированной методики может служить расчет амортизационного фонда. В отечественной практике, как известно, применяется линейный метод, согласно которому ежегодные отчисления получают делением амортизируемой стоимости объекта на число лет его функционирования. Однако, если амортизационные отчисления накапливаются, то они, естественно, должны приносить проценты. С учетом начисления процентов необходима меньшая сумма отчислений в амортизационный фонд. Метод определения амортизационных сумм с учетом фактора времени (иными словами, с учетом начисленных процентов) называют методом погасительного фонда (sinking fund method). Согласно этому методу взносы в амортизационный фонд находятся как член постоянной ренты:

$$R=\frac{W}{s_{N;i}}, \qquad (7.5)$$

где W — стоимость объекта основных фондов, подлежащая амортизации.

Поскольку R — постоянная величина, то остаточная стоимость объекта равномерно уменьшается во времени. Нетрудно убедиться в том, что
$R<R_л$, где $R_л$ — годовая сумма амортизации, полученная линейным методом.

Пример 7.4. Первоначальная стоимость объекта 1,2 млн. руб., ликвидационная стоимость после 10 лет эксплуатации 0,2 млн. руб. Необходимо определить сумму ежегодных амортизационных отчислений. По линейному методу $R_л=\frac{1200-200}{10}=100$ тыс. руб., метод погасительного фонда дает при $i=10\%$

$$R=\frac{1000}{s_{10;11}}=\frac{1000}{15{,}9374246}=62{,}745 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, для полного восстановления объекта требуется существенно меньшие ежегодные платежи, чем 100 тыс. руб.

#4

Планы создания погасительных фондов при неравных взносах. Равные взносы в погасительный фонд — не единственно возможное решение проблемы накопления необходимой для уплаты долга суммы. В зависимости от конкретных условий могут оказаться предпочтительными неравные платежи, увеличивающиеся или, наоборот, уменьшающиеся во времени. В таких случаях необходимо использовать результаты, полученные при анализе переменных рент (см. гл. 5).

Допустим, что погасительные платежи представляют собой ренту, члены которой следуют арифметической прогрессии с разностью α и первым членом R_1. Наращенная сумма такой ренты определяется формулой (5.11). Запишем ее в несколько преобразованном виде.

$$S=R_1 s_{N;i}+\alpha\cdot[(1+i)^n-1-ni]/i^2.$$

Поскольку для полного погашения задолженности наращенная сумма должна быть равна долгу, то заменим в этой формуле символ S на D. Решив ее относительно R_1, получим

$$R_1=\frac{1}{s_{N;i}}\cdot[D-\alpha\cdot[(1+i)^n-1-ni]/i^2]. \qquad (7.5)$$

Если предполагается, что платежи должны уменьшаться во времени, следуя арифметической прогрессии, то в формулу (7.5) разность прогрессии войдет с отрицательным знаком.

Поскольку погасительные платежи изменяются во времени, то очевидно, что и срочные уплаты также являются в данном случае функцией времени

$$Y=Dg+R_t, \qquad (7.6)$$

где $R_t=R_1+\alpha(t-1)$, $t=1, \ldots, n$.

Пример 7.5. Предполагается, что в фонд погашения долга средства поступают в конце каждого года в течение 5 лет. Предусматривается,

что платежи каждый раз увеличиваются на 500 руб. Необходимо разработать план формирования фонда погашения.

Для решения задачи надо прежде всего определить первый погасительный платеж , т.е. величину R_1. Пусть долг равен 10000 руб., а на средства погасительного фонда начисляются проценты по ставке $i=10\%$. Находим $s_{5;10}=6{,}1051$ и получим

$$R_1=\frac{1}{6{,}1051}\cdot[10000-\frac{500\cdot(1{,}1^5-1-5\cdot 0{,}1)}{0{,}1^2}]=732{,}87 \text{ руб.}$$

Откуда $R_t=732{,}87+500(t-1)$, $t=1, \ldots, 5$. Пусть должник выплачивает кредитору проценты по ставке 9,5% годовых, т. е. 950 руб. Динамика расходов должника представлена для этого случая в таблице 7.2. Напомним, что накопленная сумма расчитывается по формуле (7.4).

Таблица 7.2

Год	Выплата процентов	Взносы в фонд	Расходы по займу	Накопление на конец года
1	950	732,87	1682,87	732,87
2	950	1232,87	2182,87	2039,03
3	950	1732,87	2682,87	3975,80
4	950	2232,87	3182,87	6606,25
5	950	2732,87	3682,87	9999,75

Если в данном примере взносы в фонд представляют убывающую арифметическую прогрессию $\alpha = -500$, то первый взнос будет равен

$$R_1=\frac{1}{6{,}1051}\cdot(10000+500\cdot\frac{1{,}1^5-1-5\cdot 0{,}1}{0{,}1^2})=2543{,}04 \text{ руб.}$$ #5

Рассмотрим теперь случай, когда погасительные платежи изменяются по геометрической прогрессии. Как показано выше (см. формулу (5.22), наращенная сумма ренты в этом случае определяется как

$$S=R_1\cdot\frac{g^n-(1+i)^n}{g-(1+i)},$$

где R_1 — первый член ренты, g — знаменатель геометрической прогрессии. Приняв $S=D$, получим

$$R_1 = D\frac{g-(1+i)}{g^n-(1+i)^n}. \qquad (7.7)$$

Пример 7.6. Пусть долг равен 10000 руб., ставка процента - 0,055. Предполагается погасить долг через 5 лет, причем предусматривается, что платежи в фонд будут расти на 10% ежегодно. Найти размер первого платежа в погасительный фонд и план погашения при условии, что на средства фонда начисляется 6% в год.

По условиям задачи $D = 100000$, $q = 1,1$, $i=0,06$, $n=5$. Согласно (7.7)

$R_1 = 100000 \cdot \frac{1,1-1,06}{1,1^5-1,06^5} = 14690,52$ руб. Процесс формирования погасительного фонда показан в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Год	Выплата процентов	Взносы в фонд	Расходы по займу	Накопление на конец года
1	5500	14690,52	20190,52	14690,52
2	5500	16159,57	21650,57	31731,52
3	5500	17775,53	23275,53	51410,94
4	5500	19553,08	25053,08	74048,68
5	5500	21508,39	27008,39	100000,00

#6

7.3 Погашение долга в рассрочку

В практической финансовой деятельности долг часто погашается распределенными во времени платежами. Погашение долга частями или его амортизация (amortization) осуществляется различными способами: погашение основного долга равными суммами, равными и переменными срочными уплатами. Рассмотрим методики разработки плана погашения для каждого такого случая.

Погашение долга равными суммами. Пусть заем в размере D погашается в течение n лет. Тогда сумма, ежегодно идущая на погашение долга, составит $d=D/n$. Помимо погашения суммы долга должник обязан выплачивать проценты на остаток долга. Пусть для простоты проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке g. Тогда первая уплата процентов будет равна Dg, в конце второго года она составит $(D-\frac{D}{n})g=Dg-\frac{Dg}{n}$, в конце третьего года она будет равна:

$(D-2\frac{D}{n})g=Dg-2\frac{Dg}{n}$ и т. д. Таким образом, выплачиваемые займодавцу ежегодные проценты представляют собой убывающую арифметическую прогрессию с первым членом Dg и разностью $-\frac{Dg}{n}$. Легко убедиться в том, что срочная уплата также следует убывающей арифметической прогрессии, первый член которой $\frac{D}{n}+Dg$, а разность равна $-\frac{Dg}{n}$:

$Y_1=D(\frac{1}{n}+g)$; $Y_2=D(\frac{1}{n}+g)-\frac{Dg}{n}$ и т. д. Срочная уплата на момент t ($t = 1, \ldots, n$) теперь находится как

$$Y_t=D_tg+d, \qquad (7.8)$$

где D_t — остаток долга на начало года t, $d=D_1/n$ (D_1 — первоначальная сумма долга).

$$D_{t+1}=D_t\cdot\frac{n-1}{n},\ t=1, \ldots, n. \qquad (7.9)$$

Если долг погашается p раз в году и с такой же частотой выплачиваются проценты, то срочная уплата составит

$$Y_t=\frac{D_tg}{p}+\frac{D_1}{pn},$$

остаток задолженности на начало периода

$$D_{t+1}=D_t\frac{np-1}{np},\quad t=1, \ldots, pn. \qquad (7.10)$$

Пример 7.7. Пусть долг, равный 100 тыс. руб., необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежи в конце года. За заем выплачиваются проценты по ставке 5%. Сумма погашения основного долга равна 100:5 = 20 тыс. руб. в год; ежегодные процентные платежи составят: $100\cdot 0,05=5$ тыс. руб.; $(100-20)\cdot 0,05=4$ тыс. руб. и т. д. План погашения долга представлен в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Год	Остаток долга на начало года	Сумма погашения долга	Выплата процентов	Срочная уплата
1	100	20	5	25
2	80	20	4	24
3	60	20	3	23
4	40	20	2	22
5	20	20	1	21

Допустим теперь, что расходы по обслуживанию долга производятся поквартально, тогда долг в конце каждого квартала уменьшается на $\frac{100}{4}\cdot 5=5$ тыс. руб., а выплаты процентов представляют собой ряд: $100\cdot\frac{0{,}05}{4}=1{,}25$; $(100-5)\cdot\frac{0{,}05}{4}=1{,}1875$ тыс. руб. и т. д. В последнем квартале $(100-95)\cdot\frac{0{,}05}{4}=0{,}0625$ тыс. руб. Таким образом, первая сумма срочной уплаты равнв 6,25 тыс. руб., последняя 5,0625 тыс. руб.

#7

Условия займа могут предусматривать льготный период с выплатой процентов или с соответствующим наращением основной суммы долга. В первом случае срочные уплаты на протяжении льготного периода состоят из одних процентных платежей. Во втором — первоначальная сумма долга наращивается до величины $D_1(1+g)^L$, где L — продолжительность льготного периода.

У рассмотренного метода амортизации долга есть одно явное положительное свойство — простота. Однако, как мы только что убедились, срочные уплаты здесь в начале срока погашения больше, чем последующие, что, естественно, должно учитываться при заключении соответствующего соглашения.

Равные срочные уплаты. В соответствии с этим методом на протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается постоянная срочная уплата, часть которой идет в погашение долга, а другая выплачивается в виде процентов за заем. Так же как и в предыдущем методе, величина долга систематически убывает. Однако здесь в связи с тем, что с течением времени уменьшаются выплаты по процентам, увеличиваются суммы, идущие на погашение долга (так называемое прогрессивное погашение). По определению

$$Y=D_tg+R_t=const,$$

где D_t — остаток долга на начало периода t.

План погашения может быть разработан при условии, что задается срок погашения займа или величина расходов по обслуживанию долга. Рассмотрим оба случая.

а) Задан срок займа. Первый этап разработки плана — расчет срочной уплаты. Далее эта величина разбивается на процентные платежи и сумму погашения долга, после чего легко найти остаток задолженности.

Периодическая выплата сумм, равных Y, может рассматриваться как постоянная рента, поэтому, приравняв первоначальную сумму долга современной величине этой ренты находим

$$Y=\frac{D_1}{a_{n;g}}, \tag{7.11}$$

где $a_{n;g}$ — коэффициент приведения годовой ренты со ставкой g;

Все величины, необходимые для разработки плана, можно найти аналитическим путем на основе исходных данных контракта (параметров ренты). Прежде всего найдем размер первого погасительного платежа d_1. По определению $d_1=Y-D_1g$. Поскольку (см. 7.11) $D_1=Y\cdot a_{n;g}$, то

$$d_1=Y(1-ga_{n;g}))=Yv^n. \tag{7.12}$$

Соответственно, для платежа в момент t получим

$$d_t=Yv^{n-(t-1)}. \tag{7.13}$$

Из полученного выражения непосредственно следует, что платежи основного долга образуют ряд: d_1, $d_1(1+g)$, . . . , $d_1(1+g)^{n-1}$.

Использовав (7.12), найдем величину первого погасительного платежа непосредственно через сумму долга

$$d_1=Yv^n=\frac{D_1\cdot v^n}{a_{n;g}}=\frac{D_1}{s_{n;g}}. \tag{7.14}$$

Полученные выше формулы позволяют найти рекуррентные соотношения для практических расчетов, а именно:

размер погашения долга

$$d_t=Y-D_tg=d_{t-1}(1+g),\ t=1,\ \dots,\ n; \tag{7.15}$$

$$d_1 = Y - D_1 g = \frac{D_1}{s_{n;g}};$$

остаток на начало года

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+g) - Y; \qquad (7.16)$$

сумма погашенного долга на начало года t

$$W_t = \sum_{k=1}^{t-1} d_1 (1+g)^k = d_1 s_{t-1;g}, \qquad (7.17)$$

где $s_{t-1;g}$ — коэффициент наращения постоянной годовой ренты за $t-1$ лет. Формула (7.17) применяется тогда, когда детальный план погашения долга не разрабатывается.

Пример 7.8. Условия займа такие же, как и в примере 7.7. Однако погашение производится равными срочными уплатами. Погашение в этом случае осуществляется постоянной годовой рентой с параметрами: Y — неизвестная величина срочной уплаты, $n = 5$, $g = 5\%$, $a_{5;5} = 4{,}329477$.

Согласно (7.11) $Y = \frac{100000}{4{,}329477} = 23097{,}48$ руб.; $d_1 = 23097{,}48 - 100000 \cdot 0{,}05 = 18097{,}48$; $D_2 = 100000 - 18097{,}48 = 81902{,}52$ и т. д. Суммы погашения долга d_2, d_3 и т. д. удобнее рассчитывать по рекуррентной формуле (7.15) $d_2 = 18097{,}48 \cdot 1{,}05 = 19002{,}35$ и т. д. Полный план погашения представлен в табл. 7.5.

Таблица 7.5.

Год	Остаток долга на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга
1	100000,00	23097,48	5000,00	18097,48
2	81902,52	23097,48	4095,13	19002,35
3	62900,17	23097,48	3195,01	19952,47
4	42947,70	23097,48	2147,30	20950,10
5	21997,60	23097,48	1099,88	21997,60
				100000,00

#8

Пример 7.9. Допустим, что необходимо найти сумму погашенного долга на начало четвертого года погашения ссуды (см. пример 7.8). План погашения не разработан. Так как первая уплата долга $d_1 = 18097{,}48$, а $s_{3;5} = 3{,}1525$, то по формуле (7.17) находим

$$W_4 = 18097{,}48 \cdot 3{,}1525 = 57052{,}3 \text{ руб.}$$

#9

В принципе в плане погашения ничего не изменится, если уплата процентов и погашение долга осуществляются не один, а p раз в году. Формально размер годовой срочной уплаты и ее составляющие остаются такими же. По существу же положение должника несколько ухудшается, так как действительная ставка процентов превысит номинальную ставку. Если погасительные платежи и проценты выплачиваются p раз в году, то срочная уплата составит

$$\frac{Y}{p} = \frac{D_1}{a_{np;g/p}}, \qquad (7.18)$$

где Y — срочная уплата (годовая сумма); $a_{np;g/p}$ — коэффициент приведения постоянной ренты с выплатами и начислением процентов p раз в году (см. (4.25)) при начислении процентов по ставке g. Сумма погашения долга за период равна

$$d_t = \frac{Y}{p} - \frac{D_t g}{p} = d_1\left(1 + \frac{g}{p}\right), \qquad (7.19)$$

где t — порядковый номер платежа, $t = 1, \ldots, np$. Остаток долга на начало периода находится как

$$D_{t+1} = D_t - d_t; \qquad (7.20)$$

а сумма погашенного долга на начало периода составит

$$W_t = D_t - D_{t-1} = d_1 \cdot s_{t-1;g/p}, \qquad (7.21)$$

где $s_{t-1;g/p}$ — коэффициент наращения постоянной ренты (см. (4.2)) с числом периодов $t-1$ и ставкой g/p.

Пример 7.10. Пусть погашение процентов и погашение долга (пример 7.8) производится не один, а два раза в году.

Тогда $p = 2$, $g/2 = 0{,}025$, $a_{10;2,5} = 8{,}752064$.

По формуле (7.18) находим $Y/2 = 100000/8{,}752064 = 11425{,}88$, откуда $d_1 = 11425{,}88 - 100000 \cdot 0{,}025 = 8925{,}88$, $D_2 = 100000 - 8925{,}88 = 91074{,}12$ и т. д. План погашения показан в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Номер полугодия	Остаток долга на начало полугодия	Срочная уплата за полугодие	Выплата процентов за полугодие	Сумма погашения долга
1	100000,00	11425,88	2500,00	8925,88
2	91074,12	11425,88	2276,85	9149,02
3	81925,10	11425,88	2048,13	9377,75
4	72547,36	11425,88	1813,68	9612,19
5	62935,16	11425,88	1573,38	9852,50
6	53082,67	11425,88	1327,07	10098,81
7	42983,86	11425,88	1074,60	10351,28
8	32632,58	11425,88	815,81	10610,06
9	22022,52	11425,88	550,56	10875,31
10	11147,20	11425,88	278,68	11147,20
				100000,00

Суммы процентных платежей системетически уменьшаются (с 2500 до 278,68 руб. за полугодие), а выплаты по погашению основного долга увеличиваются с 8925,88 до 11147,20 руб.

#10

б) Задана срочная уплата. Первый этап разработки плана — расчет срока погашения долга. После того как найдено n, план погашения разрабатывается обычным путем, т. е. по величине долга определяется сумма процентов, а остаток от срочной уплаты идет на погашение основной суммы долга. Сумма ежегодного погашения долга определяется по формуле (7.15), а остаток задолженности на начало какого-либо года — по (7.16), сумма погашенной задолженности на начало года — по (7.17).

Срок погашения займа годовой рентой

$$n=-\frac{\ln(1-D_1\frac{g}{Y})}{\ln(1+g)}. \qquad (7.22)$$

Очевидно, что решение существует тогда, когда $D_1\frac{g}{Y}<1$.

Поскольку расчетное значение n в большинстве случаев оказывается дробной величиной, то в плане погашения равные срочные уплаты показываются за целое число периодов. Остаток долга компенсируются каким-либо способом, в частности, в следующем периоде с уплатой соответствующих процентов.

Пример 7.11. Долг равен 100 тыс. руб., выдан под 8% годовых. Если срочные уплаты установлены на уровне 20 тыс. руб., выплачиваемых в конце года, то $D_1=100000$, $Y=20000$, $g=0{,}08$ и срок погашения займа годовой рентой найдем по формуле (7.22)

$$n=-\frac{\ln(1-100000\cdot\frac{0{,}08}{20000})}{\ln 1{,}08}=6{,}637 \text{ года}.$$

Таким образом, долг при данном уровне срочных уплат может быть погашен за 7 лет, причем в первые 6 лет ежегодно расходуется по 20 тыс. руб., а в конце седьмого года — выплачивается остаток задолженности и соответствующие проценты. План погашения долга представлен в табл. 7.7. За шесть лет сумма долга сократилась до 11968,85 руб. Этот остаток и выплачивается вместе с процентами в седьмом году.

Таблица 7.7

Год	Остаток долга на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга
1	100000	20000	8000,00	12000,00
2	88000	20000	7040,00	12960,00
3	75040	20000	6003,20	13996,80
4	61043,2	20000	4883,46	15116,54
5	45926,66	20000	3674,13	16325,87
6	29600,79	20000	2368,06	17631,94
7	11968,85	20000	957,51	11968,85
				100000,00

#11

Если погасительные платежи и начисленные проценты выплачиваются p раз в году, то срок погашения (число периодов)

$$np=-\frac{\ln(1-D_1\frac{g}{Y})}{\ln(1+g/p)}. \qquad (7.23)$$

Сумма погашения долга за один период определяется по формуле (7.19), остаток долга на начало периода — по формуле (7.20), сумма погашенного долга — по (7.21).

Вариантом рассмотренной постановки задачи может служить разработка плана при заданной сумме первого погасительно платежа D_1. Решая (7.14) относительно n, находим

$$n=\frac{\ln(D_1\frac{g}{d_1}+1)}{\ln(1+g)}. \tag{7.24}$$

Если заданной является доля погашения, т. е. $f=d_1/D_1$, находим

$$n=\frac{\ln(\frac{g}{f}+1)}{\ln(1+g)}. \tag{7.25}$$

План погашения займа в рассматриваемом случае разрабатывается по стандартной схеме. Определяются размеры погасительных платежей d_1, $d_1(1+g)$, . . . , проценты на остаток долга D_1g, D_2g, . . . и срочные уплаты Y_1, Y_2, . . .

Пример 7.12. Долг равен 100000 руб., g=8%. Определить срок погашения при условии, что первое погашение равно 5000, а срочные уплаты постоянны. Воспользуемся формулой (7.24)

$$n=\frac{\ln(100000\cdot\frac{0,08}{5000}+1)}{\ln1,08}=\frac{\ln2,6}{\ln1,08}=12,43.$$

Округляем до n=12. Сумма процентов за первый год составит 8 тыс. руб., а срочная уплата 13 тыс. руб. Погасительные платежи согласно (7.13) равны 5000, $5000\cdot1,08=5400$, $5000\cdot1,08^2=5832$, . . . , $5000\cdot1,08^{12-1}=11658,19$ руб. Ряд процентных платежей: 8000; 7600;. . .; 1341,81 руб. Продолжим расчет и найдем размер последнего погасительного платежа. Для этого определим сумму погашений за 12 периодов:

$$W_{12}=5000\cdot s_{12;8}=5000\cdot\frac{1,08-1}{0,08}=5000\cdot18,977127=94885,63.$$

Отсюда после 12-го погашения оставался долг 100000 - 94885,63 = 5114,37, который и гасится в конце тринадцатого периода вместе с процентами на него. #12

Переменные срочные уплаты. Далеко не всегда оказывается удобным условие $Y=const$. Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств из каких-либо источников и зависеть от ряда обстоятельств. Срочные уплаты в этом случае образуют ряд, который либо следует какому-нибудь формальному закону (прогрессии, функции), либо его члены задаются заранее на каждую дату погашения.

Пусть ряд срочных уплат Y_1, Y_2, ... , Y_n представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем q, тогда последовательность срочных уплат можно записать в виде Y, Yq, Yq^2,...,Yq^{n-1}. Приравняв современную величину ренты, состоящей из срочных уплат, величине долга D, находим

$$Y_1=D_1\cdot\frac{q-(1+g)}{(\frac{q}{1+g})^n-1}, \tag{7.26}$$

где q — заданный годовой темп роста платежей.

План погашения займа разрабатывается таким же способом, как и выше — сперва находится сумма, идущая в качестве процента за заем, оставшаяся часть срочной уплаты идет на погашение займа.

Пример 7.13. Пусть расходы по займу уменьшаются каждый год на 10%, общий срок погашения — 5 лет, первоначальная сумма долга — 100 тыс. руб., процентная ставка — 6%. Необходимо составить план погашения ежегодными платежами. По условиям задачи D_1=100000, n=5, g=0,06, q=0,9. Первая срочная уплата согласно (7.26) составит

$$Y_1=100000\cdot\frac{0,9-1,06}{(\frac{0,9}{1,06})^5-1}=28635,27 \text{ руб.}$$

Процентные платежи в первом году равны: $100\cdot0,06=6$ тыс. руб. Сумма погашения долга 28635,27 - 6000 = 22635,27 руб., остаток задолженности на начало второго года 100000 - 22635,27 = 77364,73 руб. Вторая срочная уплата равна: $28635,26\cdot0,9=21129,86$. План погашения представлен в табл. 7.8.

Если заем предполагает расчеты p раз в году, то первая срочная уплата (платежи и уплата процентов)

$$Y_1=D_1\cdot\frac{q-(1+g/p)}{(\frac{q}{1+g/p})^{np}-1}. \tag{7.27}$$

Таблица 7.8

Год	Остаток долга на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Сумма погашения долга
1	100000,00	6000,00	28635,27	22635,27
2	77364,73	4641,88	25771,74	21129,86
3	56234,87	3374,09	23194,57	19820,48
4	36414,39	2184,86	20875,10	18690,24
5	17724,15	1063,45	18787,60	17724,15
				100000,00

#13

Формула (7.27) предполагает, что каждый раз на остаток долга начисляются проценты по ставке g/p.

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с возможностью получения соответствующих средств и задаются заранее как $Y_1, \dots ,$ Y_{n-1}. Величина Y_n (последняя срочная уплата) не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода. Схема расчета показателей плана погашения долга для этого случая представлена в табл. 7.9 при условии, что платежи производится ежегодно.

Таблица 7.9

Схема расчета плана погашения долга (срочные уплаты заданы для n-1 лет)

Год	Долг на начало года	Срочная уплата	Выплата проц.	Сумма погашения долга	Долг на конец года
1	D_1	Y_1	$D_1 g$	$Y_1 - D_1 g$	$D_1(1+g) - Y_1$
2	D_2	Y_2	$D_2 g$	$Y_2 - D_2 g$	$D_2(1+g) - Y_2$
. . .					
n	D_n	Y_n	$D_n g$	$Y_n - D_n g$	$D_{n-1}(1+g) - Y_n = 0$

Пример 7.14. Пусть долг равен 10000 руб., ставка процентов — 6%. Срочные уплаты заданы для трех лет в размерах 4, 2 и 3 тыс. руб. Срок займа — 4 года. Находим следующий план погашения (табл. 7.10).

Таблица 7.10

Год	Остаток долга на начало года	Срочная уплата	Выплата процентов	Погашение долга	Долг на конец года
1	10000	4000	600,00	3400,00	6600
2	6600	2000	396,00	1604,00	4996
3	4996	3000	299,76	2700,24	2295,76
4	2295,76	2433,51	137,75	2295,76	0

#14

7.4 Потребительский кредит

Одна из задач, возникающих при планировании погашения задолженности, заключается в расчете остатка задолженности на любой момент срока погашения долга. Выше соответствующие характеристики были найдены для случаев погашения долга частями. Причем решение задачи было очевидным, так как во всех случаях сумма процентных платежей определялось «естественным путем» по фактическому остатку долга. Иное дело в потребительском кредите с равномерным начислением процентов (см. 1. 3). Напомним, что проценты здесь начисляются сразу на всю сумму кредита, а сумма задолженности равномерно погашается на протяжении всего срока кредита.

Пусть долг с процентами за n лет равен S. Если предусматривается погашение долга p раз в году, то каждый раз уплачивается сумма $Y=S:pn$. В терминах, принятых выше, величина Y представляет собой срочную уплату или сумму обслуживания долга. Возникает вопрос как расчленить Y на процентные платежи и сумму погашения основного долга. Решение его весьма специфично. Для этого применяется так называемое «правило 78» (rule of 78). Для характеристики названного правила остановимся сперва на частном случае, когда кредит выдается на один год с помесячным погашением. Сумма порядковых номеров месяцев в году равна 78, отсюда и название правила. Согласно этому правилу, при первом платеже уплата процентов составляет величину 12 / 78 общей начисленной суммы процентов, оставшаяся часть суммы платежа идет на уплату основного долга. Из второго платежа на уплату процентов идет 11/78 общей суммы процентов и т. д. Последняя уплата процентов составит 1/78. Таким образом, процентные платежи представляют собой убывающую арифметическую прогрессию, т. е. погашение процентов происходит ускоренно.

Обобщим это правило для n лет и p платежей в году. Тогда последовательные номера месяцев в обратном порядке представляют собой величины $t=pn$, $pn-1$, . . . , 1, а сумма этих чисел будет равна:

$$Q=\sum_{t=1}^{pn} t=pn\cdot\frac{pn+1}{2}. \qquad (7.28)$$

Доли от общей суммы процентов, следовательно, составят t/Q. Теперь легко найти абсолютные суммы процентных платежей: $(t/Q)\cdot Din$, где D, как и выше, первоначальная сумма долга.

Определим сумму погашенного долга на конец периода k. Очевидно, что

$$W_k=Y_k-\sum_{t=1}^{k} t\cdot\frac{Din}{Q}. \qquad (7.29)$$

Нетрудно доказать, что сумма номеров месяцев $\sum t$ в интервале от $t=1$ до $t=k$ равна

$$\sum_{t=1}^{k} t=k(pn-\frac{k-1}{2}). \qquad (7.30)$$

Пример 7.15. Кредит в сумме 10 тыс. руб. выдан на 3 года под разовое начисление процентов (10% годовых). Погашение задолженности ежемесячное. Общая сумма задолженности в этих условиях: $S=D(1+ni)=10000\cdot 1{,}3=13000$ руб.

Сумма начисленных процентов 3000 руб. Ежемесячные выплаты составят $Y=\frac{13000}{12\cdot 3}=361{,}11$ руб.

По условиям примера $p=12$, $n=3$, откуда $t=36,35,\ldots,2,1$. Сумма этих чисел равна 666. Соответственно из первого платежа в счет уплаты процентов идет 36/666 общей суммы начисленного процента, т. е. 162,16 руб. Разность 361,11-162,16 = 198,95 руб. выделяется на погашение основного долга. В таблице 7.11 приведены (с некоторыми пропусками) величины остатка долга, суммы процентных платежей и суммы, идущие на погашение основного долга. Нетрудно убедиться, что проценты стремительно уменьшаются (от 162,16 руб. в первом месяце до 4,51 руб. в последнем), а суммы, погашающие долг, растут.

Таблица 7.11

Месяц	Остаток долга на начало месяца	Сумма процентов	Погашение основного долга
1	10000,00	162,16	198,95
2	9801,05	157,66	203,45
3	9597,60	153,15	207,96
. . .			
15	6804,82	99,10	262,01
16	6542,81	94,59	266,52
. . .			
35	708,70	9,01	352,10
36	356,60	4,51	356,60
Итого		3000	10000,00

Найдем сумму погашенного долга на конец 12-го и 18-го месяцев, получим: $W_{12}=2684{,}67$, $W_{18}=3621{,}60$ руб. Таким образом, по прошествии одной трети срока основной долг будет оплачен только в размере 26,8%, а по истечении половины срока он погашен на 36,2%. Заметим, что, если бы этот долг погашался с начислением процентов на остаток долга, то его амортизация обошлась бы заметно дешевле для должника. Например, при постоянных расходах на обслуживание долга получим по формуле (7.18) коэффициент приведения $a_{36;10/12}=30{,}9912$. Откуда $Y=10000:(2\cdot 2{,}58259)=10000:30{,}9912=322{,}67$ руб. Как видим, полное погашение долга в этом случае достигается ежемесячной уплатой 322,67 руб. (а не 361,11 руб.). Причем на уплату процентов в первом месяце списывается только $10000\cdot\frac{0{,}1}{12}=83{,}33$ руб., и на погашение основного долга

322,67-83,33 = 239,34 руб. #15

7.5 Погашение ипотечной ссуды.

Ипотечная ссуда (mortgage) — распространенная финансовая операция. Суть ее сводится к следующему. Владелец некоторого имущества (mortgagor) получает ссуду у заимодавца (mortgagee) и в качестве обеспечения долга передает последнему право на это имущество в случае отказа от погашения задолженности. Основными объектами залога являются жилые дома (в США 75% от общей суммы закладных), фермы, земля, различная собственность компаний. Не будем останавливаться на правовых вопросах этой операции и сразу перейдем к погашению ипотечной задолженности. Очевидно, что для этого необходимо решить две задачи: определить ежемесячные расходы должника и найти остаток задолженности по ссуде на любой момент до полного погашения. Поэтому при определении размера ежемесячных выплат поступим также как и при планировании погашения задолженности равными срочными уплатами.

Приравняв сумму долга современной величине ренты, у которой $p=m=12$, и решив равенство относительно $R/12$, находим

$$y=\frac{R}{12}=D\frac{\frac{i}{12}}{1-\left(1+\frac{i}{12}\right)^{-n}}; \qquad (7.31)$$

где y — сумма ежемесячного взноса в покрытие долга, D — сумма долга, n — срок погашения (месяцев). Если погашение поквартальное, то вместо $\frac{i}{12}$ берется $\frac{i}{4}$ и n означает число кварталов.

Коэффициент, на который умножается сумма долга, зависит только от числа лет ссуды и процентной ставки. В Приложении 6 приводятся значения этого коэффициента для широкого диапазона процентных ставок и сроков ипотеки.

Пример 7.16. Пусть под залог выдана ссуда 100 тыс. руб. Погашение ежемесячное, срок — 10 лет, процентная ставка — 12% годовых. Для этих условий ежемесячные расходы должника в конце месяца составят

$$y=100000\frac{0{,}01}{1-1{,}01^{-120}}=1434{,}71 \text{ руб.}$$

#16

Перейдем ко второй проблеме. При выдаче ссуды под залог для обеих сторон в сделке важно знать сумму погашенного долга и его остаток (mortgage balance) на любой промежуточный момент. С этой проблемой мы уже встречались выше (погашение долга равными срочными уплатами). Используем полученные результаты для случая, когда $p=m=12$. Находим следующие необходимые для расчетов соотношения. Сумма погашения долга за месяц:

$$d_t=d_{t-1}\left(1+\frac{i}{12}\right)=d_1\left(1+\frac{i}{12}\right)^{t-1},$$

где t — номер месяца. Сумма погашения долга в первом месяце

$$d_1=y-D\frac{i}{12}.$$

Остатки долга на начало месяца

$$D_{t+1}=D_t-d_t.$$

Для определения суммы погашенного долга выпишем последовательные величины погасительных платежей: d_1, $d_1\left(1+\frac{i}{12}\right)$, $d_1\left(1+\frac{i}{12}\right)^2, \ldots, d_1\left(1+\frac{i}{12}\right)^{n-1}$. Сумму этих величин от начала погашения до месяца t включительно определим следующим образом:

$$W_t=d_1\sum(1+i/12)^j=d_1 s_{t;i/12}, \quad j=1, \ldots, t, \qquad (7.32)$$

где

$$s_{t;i/12}=\frac{(1+i/12)^t-1}{i/12}. \qquad (7.33)$$

Остаток долга на начало следующего месяца находим как разность

$$D_{t+1}=D_1-W_{t-1}. \qquad (7.34)$$

Пример 7.17. Продолжим анализ ссуды под залог (пример 7.16). Определим остатки долга на начало каждого месяца и составляющие срочных уплат. В таблице 7.12 приведены соответствующие данные. Покажем как они рассчитываются для первых двух месяцев. Проценты за первый месяц составят $100000 \cdot 0{,}01=1000$ руб.; сумма погашения долга 1434,71-1000 = 434,71; остаток долга на начало второго месяца 100000 - 434,71 = 99565,29. Проценты за второй месяц $99565{,}29 \cdot 0{,}01=995{,}65$; сумма погашения долга 1434,71 - 995,65 = 439,06 и т. д.

Определим теперь остаток долга на начало, допустим, 118-го месяца. Он равен разности $D_{118}=D_1-W_{117}$.

Находим

$$W_{117}=d_1 s_{117;1}=434{,}71\frac{1{,}01^{117}-1}{0{,}01}=95780{,}65.$$

Откуда $D_{118}=100000-95780{,}65=4219{,}35$ руб.

Таблица 7.12

Динамика остатка задолженности.

Месяц	Остаток долга на начало периода	Взнос	Проценты	Погашение долга
1	100000,00	1434,71	1000,00	434,71
2	99565,29	1434,71	995,65	439,06
3	99126,23	1434,71	991,26	443,45
. . .				
37	81274,07	1434,71	812,74	621,97
38	80652,10	1434,71	806,52	628,19
39	80017,63	1434,71	800,24	634,47
. . .				
118	4219,35	1434,71	42,20	1392,51
119	2826,94	1434,71	28,27	1406,44
120	1420,50	1434,71	14,21	1420,50

#17

Нетрадиционные ипотеки. Начиная с семидесятых годов за рубежом в практике стали применяться новые виды ссуд под залог, которые предусматривают более сложные условия, чем тадиционные. Рассмотрим некоторые из них.

Ссуды с переменной процентной ставкой (variable-rate mortgage). Уровень ставки не фиксируется в договоре. Она «привязывается» к какому-либо экономическому индексу. Пересмотр осуществляется один раз в полугодие. Предусматриваются предельные (максимальные) нормы для изменений ставки.

Ссуды с периодическим пересмотром процентной ставки (rollover mortgage). Этот вид залога распространен в Канаде. Ныне он начал применяться и на рынке закладных в США. Стороны соглашаются пересматривать уровень ставки каждые 3-5 лет. Договор периодически перезаключается на новой основе.

В перечисленных выше ипотечных ссудах предусматривается механизм адаптации договора к текущим условиям денежного рынка. Однако в связи с тем, что уровень процентной ставки для будущего остается неопределенным, здесь невозможно разработать полный план погашения долга.

Ссуды с постоянным увеличением расходов по обслуживанию долга (graduated payment mortgage). Такие ссуды предполагают постоянный рост месячных расходов должника в течение первых 5 или 10 лет. В

первые годы текущие расходы могут оказаться меньше, чем суммы, необходимые для полного погашения процентов. В связи с этим сумма основного долга некоторое время будет увеличиваться (negative amortization). Поскольку все условия сделки определены и зафиксированы, то имеется возможность для планирования погашения задолженности.

Разделим весь срок погашения ссуды N на два интервала протяженностью m и n месяцев. В первом расходы должника растут с постоянным темпом $y_t=yg^{t-1}$, где y - расходы в первом месяце, g - ежемесячный темп роста; во втором периоде расходы дрлжника постоянны $y_t=yg^{m-1}$. Найдем современную стоимость платежей в каждом периоде применительно к моменту получения ссуды. Дисконтированные платежи в первом периоде представляют собой ряд yv, ygv^2, ... , $yg^{t-1}v^t$, ... , $yg^{m-1}v^m$, где v — дисконтированный множитель по ставке $i/12$. Сумма членов этой прогрессии составит

$$A_1=yv\frac{(gv)^m-1}{gv-1}.$$

Во втором периоде платежи представляют собой постоянную ренту с членом yg^{m-1}. На начало операции современная величина платежей определяется по формуле

$$A_2=yg^{m-1}v^{m+1}\frac{v^n-1}{v-1}.$$

Приравняем современную величину платежей всего потока платежей сумме задолженности, после чего нетрудно найти искомую сумму первого погасительного платежа

$$y=D:[v\frac{(gv)^m-1}{gv-1}+g^{m-1}v^{m+1}\frac{v^n-1}{v-1}]. \tag{7.35}$$

Во втором периоде производятся постоянные платежи. Остаток долга на начало каждого месяца, очевидно, равен в первом периоде: $D_{t+1}=D_t-d_t$, $t=1$, ... , m, во втором периоде $D_{T+1}=D_T-d_T$, $T=1$, ... , n, где d_t и d_T — суммы погашенного долга:

$$d_t=yg^{t-1}-(D_t-d_t)\frac{i}{12};$$

$$d_T = yg^{m-1} - (D_T - d_T)\frac{i}{12}.$$

Пример 7.18. Сумма ипотечного долга — 100 тыс. руб.; общий срок погашения 20 лет (240 месяцев); период с ростом погасительных платежей — 60 месяцев; процентная ставка — 10% годовых; ежегодный прирост платежей 5%. Необходимо найти сумму платежей. Исходные данные: m=60, n=240−60=180, i=0,1.

Темп роста ежемесячных расходов в первом периоде составит $1{,}05^{1/12}=1{,}004074$. На основании приведенных данных получим по формуле (7.35) y=802,87 руб. Таким образом, ежемесячные расходы в первом периоде равны $y_t=802{,}87\cdot 1{,}004074^{t-1}$. Расходы в конце пятилетнего периода $y_{60}=802{,}87\cdot 1{,}0040074^{59}=1020{,}52$ руб. Эта же сумма ежемесячно выплачивается и во втором периоде — см. таблицу 7.13.

Как видим, сумма начисленных процентов в первом месяце не покрывается срочной уплатой. Нехватку средств (30,46) присоединяются к сумме основного долга. В первом периоде сумма задолженности растет, а затем падает. Максимальная сумма долга приходится на начало одиннадцатого месяца. К концу этого периода задолженность несколько сокращается (D_{61}=94968,45 руб.)

Таблица 7.13

Месяц	Остаток долга на начало месяца	Взнос	Проценты	Погашение долга
1	100 000,00	802,87	833,33	-30,46
2	100 030,46	806,14	833,58	-27,44
3	100 057,90	809,43	833,81	-24,38
. . .				
10	100 162,25	832,79	834,68	-1,89
11	100 164,14	836,19	834,70	1,49
12	100 157,75	839,59	834,64	4,94
. . .				
59	95 416,91	1016,38	795,14	221,24
60	95 195,67	1020,52	793,29	227,22
61	94 968,45	1020,52	791,40	229,12
. . .				
239	2 015,72	1020,52	16,84	1003,68
240	1 012,04	1020,52	8,48	1012,04

Если до одиннадцатого месяца сумма взносов недостаточна для полного погашения задолженности по процентам, то, начиная с t=11 взносы превышают эту сумму, остаток идет на погашение основной задолженности. Эта сумма увеличивается с каждым шагом во времени. Если для t=11 взносы распределяются на проценты и погасительные платежи как 834,7 и 1,49, то в последнем месяце второго периода как 8,48 и 1012,4.

#18

7.6. Льготные займы и кредиты.

Грант-элемент. Предмет обсуждения в данном параграфе также связан с долгосрочными займами. Однако здесь они рассматриваются под другим углом зрения. Дело в том, что в ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются под льготные условия. Низкая процентная ставка, предусматриваемая таким займом, в сочетании с большим его сроком и льготным периодом дают должнику существенную выгоду, которую в ряде случаев можно рассматривать как субсидию. В свою очередь кредитор в этих условиях несет некоторые потери, так как он мог бы инвестировать эти средства на более выгодных условиях.

Проблема определения размера этой помощи обсуждалась в международных организациях и экономической литературе главным образом с позиции межстрановых сопоставлений — для сравнения финансовой нагрузки, которую берут на себя страны, предоставляющие займы с льготными условиями*.

Льготные займы и кредиты могут предоставляться и во внутристрановой финансовой практике. Ограничимся в связи с такими займами методикой измерения так называемого грант-элемента.

Грант-элемент — это та условная потеря заимодавца, которая связана с более низкой ставкой процентов, чем ставка, принятая на рынке. Грант-элемент определяется как разностть между номинальной суммой займа и современной величиной погасительных платежей и выплаченных процентов. Вся проблема, как это легко понять, сводится к выбору надлежащей ставки для расчета современной величины платежей. Обычно в литературе приводятся лишь самые общие рекомендации по

* *См. Ohlin G. Foreign Aid Policies Reconsidered. -P. 1966, а также статью: Pincus J. A. The Cost of Foreign Aid. — The Review of Economics and Statistics. Vol. XLV, November, 1963, 4*

выбору этой ставки, например, использовать превалирующую на рынке капиталов долгосрочную ставку.

Грант-элемент может быть подсчитан в виде абсолютной или относительной величины.

Абсолютный грант-элемент $W=D-G$,

относительный грант-элемент $w=W/G$,

где D — сумма займа, G — современная величина платежей, поступающих в счет погашения займа, определенная по реальным ставкам. Величины W, G и w определяются условиями погашения займа.

Выведем формулы для расчета W и w при условии, что долг и проценты погашаются равными срочными уплатами. Пусть заем выдан на n лет и предусматривает регулярную выплату процентов по ставке g. На денежном рынке доминирующей является ставка i. В этом случае срочная уплата в конце каждого года равна $Y=D/a_{n;g}$, (см. 7.11), а современная величина всех платежей по займу составит $Ya_{n;i}$. В итоге

$$W=D-\frac{D}{a_{n;g}}\cdot a_{n;i}=D(1-a_{n;i}/a_{n;g}); \qquad (7.36)$$

$$w=1-a_{n;i}/a_{n;g}, \qquad (7.37)$$

где $a_{n;i}$ и $a_{n;g}$ — коэффициенты приведения постоянных годовых рент, определенные для процентных ставок i и g соответственно; i — ставка, по которой обычно производятся долгосрочные ссудные операции; g — льготная ставка, предусмотренная условиями займа, $i>g$.

Пример 7.19. Льготный заем выдан на 10 лет под 3,8%. Пусть предусматривается погашение займа равными срочными уплатами. Допустим, что обычная ставка для такого срока займа равна 8%. В этом случае

$$w=1-\frac{1-1{,}08^{-10}}{0{,}08}\cdot\frac{0{,}038}{1-0{,}38^{-10}}=0{,}1809, \text{ или } 18{,}09\%.$$

Если сумма займа равна 10 млн. руб., то абсолютная сумма грант-элемента (условная абсолютная сумма льготы) составит

$W=10\cdot 0{,}1809=1{,}809$ млн. руб. #19

Наличие льготного периода уменьшает фактические расходы должника (так как $g<i$). Если предусмотрен льготный период, в течение которого выплачиваются проценты, то относительный грант-элемент

$$w=1-\left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}\cdot v^L+ga_{L;i}\right). \qquad (7.38)$$

Здесь L — продолжительность льготного периода, $a_{n-L;i}$ и $a_{n-L;g}$ — коэффициенты приведения постоянной ренты со сроками $n-L$ и ставками i и g соответственно; v — дисконтный множитель по ставке i.

Пример 7.20. Пусть заем примера 7.18 предусматривает трехлетний льготный период, в течение которого выплачиваются проценты. Для определения грант-элемента находим: $a_{7;8}=5{,}20637$;

$$a_{7;3,8}=6{,}04667;\ a_{3;8}=2{,}5771;\ v^3=1{,}08^{-3}=0{,}79383,$$

$$w=1-\left(\frac{5{,}20637}{6{,}04667}0{,}74383+0{,}038\cdot 2{,}5771\right)=0{,}2185, \text{ или } 21{,}85\% \text{ (без}$$

льготного периода $w=18{,}09\%$). #20

Пусть в льготном периоде проценты не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме долга, который и погашается в течение $n-L$ лет. Условия такого займа более льготны, чем при выплате процентов на протяжении этого периода. Тогда относительный грант-элемент

$$w=1-\left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}\right)\cdot\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^L. \qquad (7.39)$$

Пример 7.21. Пусть условия займа в примере 7.18 предусматривают, что в льготном периоде проценты не выплачиваются, тогда

$$w=1-\frac{5{,}20637}{6{,}04667}\cdot\left(\frac{1{,}038}{1{,}08}\right)^3=0{,}2356, \text{ или } 23{,}56\%. \qquad \#21$$

Итак, грант-элемент — это условная обобщающая характеристика льготности кредита. Сумма, которая равна грант-элементу, может быть получена кредитором лишь в случае, если этот кредит будет предоставлен без льготных условий и именно под те проценты, которые приняты при определении грант-элемента.

Беспроцентный заем. Предельным случаем льготного займа является беспроцентный заем. Выдача такого займа связана с потерями, которые можно определить, полагая, что заем можно было бы разместить под проценты по ставке i. Условия беспроцентного займа могут предусматривать льготный период. Если такого нет, то относительная величина потерь определяется как

$$w=1-a_{n;i}/n. \tag{7.40}$$

Например, кредитор, предоставляя беспроцентный заем на 10 лет при существующей на денежном рынке ставке 10%, фактически выдает безвозмездную субсидию, равную 38,6% от суммы займа.

Значения w для некоторых сроков займа и уровней процентных ставок приведены в табл. 7.14.

Таблица 7.14.

Относительная величина потерь от беспроцентного займа, %.

i,%	Срок займа, лет							
	5	6	8	10	12	15	20	25
5	13,4	15,4	19,2	22,8	26,1	30,8	37,7	43,6
6	15,8	18,0	22,4	26,4	30,1	35,3	42,7	48,9
7	18,0	20,6	25,4	29,8	33,8	39,3	47,0	53,4
8	20,1	23,0	28,2	32,9	37,2	42,9	50,9	57,3
9	22,2	25,2	30,8	35,8	40,3	46,3	54,4	60,7
10	24,2	27,4	33,3	38,6	43,2	49,3	57,4	63,7
11	26,1	29,5	35,7	41,1	45,9	52,1	60,2	66,3
12	27,9	31,5	37,9	43,5	48,4	54,6	62,7	68,6

Если предусматривается льготный период продолжительностью L лет, тогда относительная величина потерь находится как

$$w=1-\frac{a_{n-L;i}}{n}\cdot v_i^L. \tag{7.41}$$

Пример 7.22. Пусть условия примера 7.18 предусматривают беспроцентный заем, тогда при отсутствии льготного периода находим

$w=1-a_{10;8}/10=0{,}329$, т. е. 32,9%, и при трехлетнем льготном периоде:

$$w=1-\frac{a_{7;8}}{10}\cdot 1{,}08^3=0{,}3441, \text{ т. е. } 34{,}41\%. \qquad \#22$$

ГЛАВА 8. АНАЛИЗ КРЕДИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

8.1. Измерители доходности

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей, доходы от облигаций и других ценных бумаг и т. д. Само понятие «доход» определяется конкретным содержанием операции. Причем в одной операции часто предусматривается два, а то и три источника дохода. Например, ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные, владелец облигации помимо процентов (поступлений по купонам) получает разницу между выкупной ценой облигации и ценой ее приобретения. В связи со сказанным взникает проблема измерения эффективности (доходности) операции с учетом всех источников дохода. Обобщенная характеристика доходности должна быть сопоставимой и применима к любым видам операций и ценных бумаг. Степень *финансовой эффективности (доходности)* этих операций обычно измеряется в виде годовой ставки (нормы) процентов, чаще сложных, реже простых. Искомые показатели получают исходя из общего принципа — все вложения и доходы с учетом конкретного их вида рассматриваются под углом зрения эквивалентной (равнодоходной) ссудной операции. Измерение доходности в виде годовой процентной ставки не является единственно возможным методом. В ряде стран для некоторых операций практикуются и иные сопоставимые измерители, например, доходность трехмесячных депозитов или некоторых видов облигаций, выпускаемых казначейством. Иначе говоря, все затраты и доходы конкретной сделки в этом случае «привязываются» к соответствующему финансовому инструменту.

Решение проблемы измерения и сопоставления степени доходности финансово-кредитных операций заключается в разработке методик расчета некоторой условной годовой ставки для каждого вида операций с учетом особенностей соответствующих контрактов и условий их выполнения. Такие операции различаются между собой во многих отношениях. Эти различия на первый взгляд могут и не представляться существенными, однако практически все условия операции в большей или меньшей мере влияют на конечные результаты — финансовую эффективность.

Расчетная процентная ставка, о которой идет речь, получила различное название. В простых депозитных и ссудных операциях она называется эффективной (см. 2.2), в расчетах по оценке облигаций ее часто называют *полной доходностью* или *доходностью на момент погашения* (yield to maturity). В анализе производственных инвестиций для аналогичного по содержанию показателя применяется термин *внутренняя норма доходности* или *внутренняя норма процента* (internal rate of return, IRR). Этот термин в настоящее время широко распространен за рубежом и вне рамок производственных инвестиций, его приименяют в коммерческой и банковской практике. Свое название данный показатель, по-видимому, получил в связи с тем, что он адекватен всем условиям инвестиционного проекта в совокупности и непосредственно не фигурирует в контрактах. На наш взгляд, этот термин не вписывается в принятую у нас терминологию. Поэтому в дальнейшем будем называть соответствующую годовую ставку *полной доходностью*, ПД.

Итак, под ПД понимают ту расчетную ставку процентов, при которой капитализация всех видов доходов по операции равна сумме инвестиций и, следовательно, капиталовложения окупаются. Иначе говоря, начисление процентов на вложения по ставке, равной ПД, обеспечит выплату всех предусмотренных платежей. Применительно к облигации, например, это означает равенство цены приобретения облигации сумме дисконтированных по ПД купонных платежей и выкупной цены. Для ссудной операции — равенство действительной суммы кредита (т. е. кредит за вычетом комиссионных) сумме дисконтированных поступлений (процентов и погашения долга). Чем выше ПД, тем больше эффективность операции. При неблагоприятных условиях ПД может быть нулевой или даже отрицательной величиной. Получаемый показатель ПД является не только измерителем доходности операции для кредитора, он также характеризует *цену кредита* для должника. Следует отметить, что при получении кредита должник может нести какие-либо дополнительные разовые расходы, которые увеличат цену кредита, но оставят без изменения доходность кредитной операции для владельца денег.

Основное внимание в главе уделено проблеме оценки ПД для конкретных видов финансовых операций и анализу факторов, влияющих на этот показатель.

В западной финансовой литературе предлагается множество формул для расчета показателей ПД, причем исходные посылки для их построения обычно даже не обсуждаются. Можно показать, что все подобного рода формулы базируются на равенстве, которое назовем *балансом финансовой операции*. Обсуждение методов оценки показателей доходности начнем с рассмотрения этого уравнения.

8.2. Баланс финансово-кредитной операции

Необходимым условием финансовой или кредитной операции в любом ее виде (ссуда, депозит, заем, инвестиции в проект и т. д.) является

сбалансированность вложений и отдачи. На этом требовании базируются все рассмотренные в предыдущей главе методы планирования погашения задолженности. Посмотрим теперь на проблему сбалансированности с более общей, теоретической, точки зрения, не отвлекаясь на технические детали расчета сумм обслуживания долга и ее компонент.

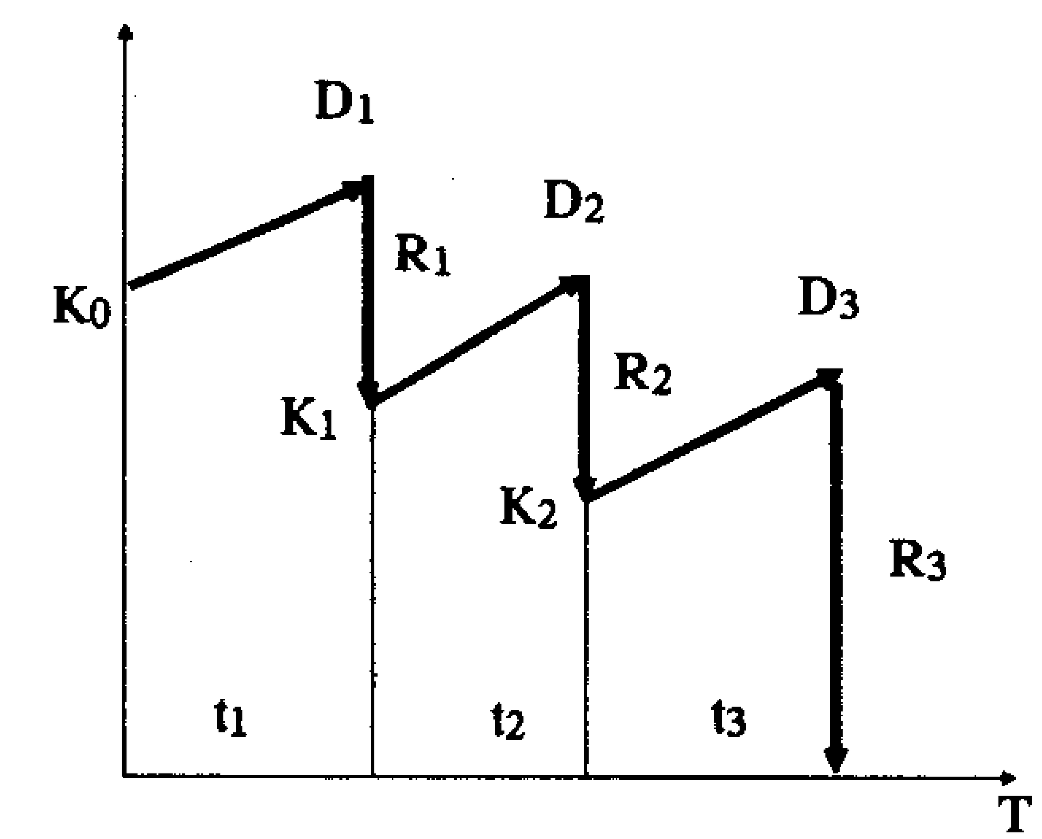

Рис. 8.1

Сбалансированность вложений и отдачи лучше всего пояснить, обратившись к графику. Пусть выдан кредит в размере K_o на срок T. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности, допустим, производятся два платежа, R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается окончательная сумма, R_3 (для нас здесь не имеет значения какая сумма или ее часть идет на проценты, а какая погашает основной долг). На рис. 8.1 отражена динамика изменения задолженности. На интервале t_1 задолженность возрастает (в силу начисления процентов) до величины D_1. В этот же момент производится выплата R_1 и задолженность уменьшается до величины K_1 и т. д. Заканчивается операция получением кредитором суммы R_3. В этот момент задолженность должна быть равна нулю. Назовем такой график *контуром*. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур. Иначе говоря, совокупность платежей точно соответствует условиям сделки и последний платеж полностью покрывает остаток задолженности.

Контур позволяет составить уравнение, балансирующее вложение средств и отдачу от них. Для случая, показанного на рис. 8.1, получим следующее последовательное значение задолженности после уплаты R_1 и R_2:

$$K_1=K_0q^{t_1}-R_1; \quad K_2=K_1^{t_2}-R_2; \quad K_2q^{t_3}-R_2=0,$$

где $q^t=(1+i)^t$ — множитель наращения, i — ставка процентов по кредиту. В общем для сумм задолженности на каждом шаге операции запишем следующее рекуррентное соотношение

$$K_j=K_{j-1}q^{t_j}-R_j.$$

Очевидно, что баланс кредита и погасительных платежей имеет место в том случае, когда последний платеж замыкает контур. В нашем примере полная сбалансированность означает

$$K_2q^{t_3}-R_2=0.$$

Определим K_2 через K_0 и подставим полученный результат в балансовое уравнение:

$$[(K_0q^{t_1}-R_1)q^{t_2}-R_2]q^{t_3}-R_3=0.$$

Балансовое уравнение становится весьма громоздким, если число временных интервалов больше трех. Поэтому преобразуем найденное выражение, после чего

$$K_0q^{T}-(R_1q^{t_2+t_3}+R_2q^{t_3}+R_3)=0, \qquad (8.1)$$

где $T=\sum t_j$.

Найденное балансовое уравнение для нас ценно прежде всего в методологическом плане. Здесь ясно показано, что кредитная операция может быть расчленена без какой-либо потери точности на два как бы встречных процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок до момента платежа и до конца срока операции. Назовем такой подход *методом «встречных операций»*. В ряде случаев он существенно упрощает доказательства и в дальнейшем мы неоднократно будем его применять.

Умножив (8.1) на дисконтный множитель v^T, получим

$$K_0-(R_1v^{t_1}+R_2v^{t_1+t_2}+R_3v^{T})=0.$$

Иначе говоря, сумма современных величин погасительных платежей на момент выдачи кредита равна при полной сбалансированности платежей сумме этого кредита. Это положение уже применялось нами, правда, на интуитивном уровне, при планировании погашения задолженности.

Обобщим (8.1) для случая с n погасительными платежами

$$K_0q^{T}-\sum R_jq^{T_j}=0,\ j=1,\ \ldots\ n,$$

где $T_j=\sum t_j$ — время от момента платежа R_j до конца срока.

При написании балансового уравнения предполагалось, что процентная ставка постоянна на всем протяжения операции. Принципиально ничего не меняется, если значение ставки варьируется во времени. Допустим, что изменение происходит на каждом шаге. Тогда можно записать

$$K_0q_1^{t_1}q_2^{t_2}\ \ldots\ q_n^{t_n}-(R_1q_1^{T_1}+R_2q_2^{T_2}+\ \ldots\ +R_nq_n^{T_n})=0,$$

где $T_1=\sum_{j=2}^{n}t_j, T_2=\sum_{j=3}^{n}t_j\ \ldots$

Балансовые уравнения, о которых только что шла речь, позволяют решить несколько важных в практическом отношении задач, а именно: измерить доходность от операции и распределить получаемый доход по их источникам и периодам, предусматриваемыми условиями контракта или по календарным отрезкам времени. Для этого, однако, надо разработать балансовые уравнения, в которых наращение (или дисконтирование) производится по неизвестной ставке, характеризующей полную доходность. Именно таким путем определяются эти величины в следующих параграфах.

8.3. Ссудные и учетные операции с удержанием комиссионных.

Ссудные операции. Доходность ссудных операций (без учета комиссионных) измеряется с помощью эквивалентной годовой ставки сложных процентов, см. 3.1. За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взымает комиссионные, которые заметно повышают доходность операций, так как сумма фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n. При ее выдаче удерживаются комиссионные за операцию (G). Фактически выданная ссуда равна $D-G$. Сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. При определении доходности этой операции в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$ исходим из того, что наращение величины $D-G$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение D по ставке i. Разумеется, отклонение фактической суммы кредита от его номинала связано не только с удержанием комиссионных. Однако, для краткости любое удержание денег, сделанное в пользу кредитора, будем называть в этой главе комиссионными.

По определению балансовое уравнение запишем в виде:

$$(D-G)(1+i_э)^n=D(1+ni).$$

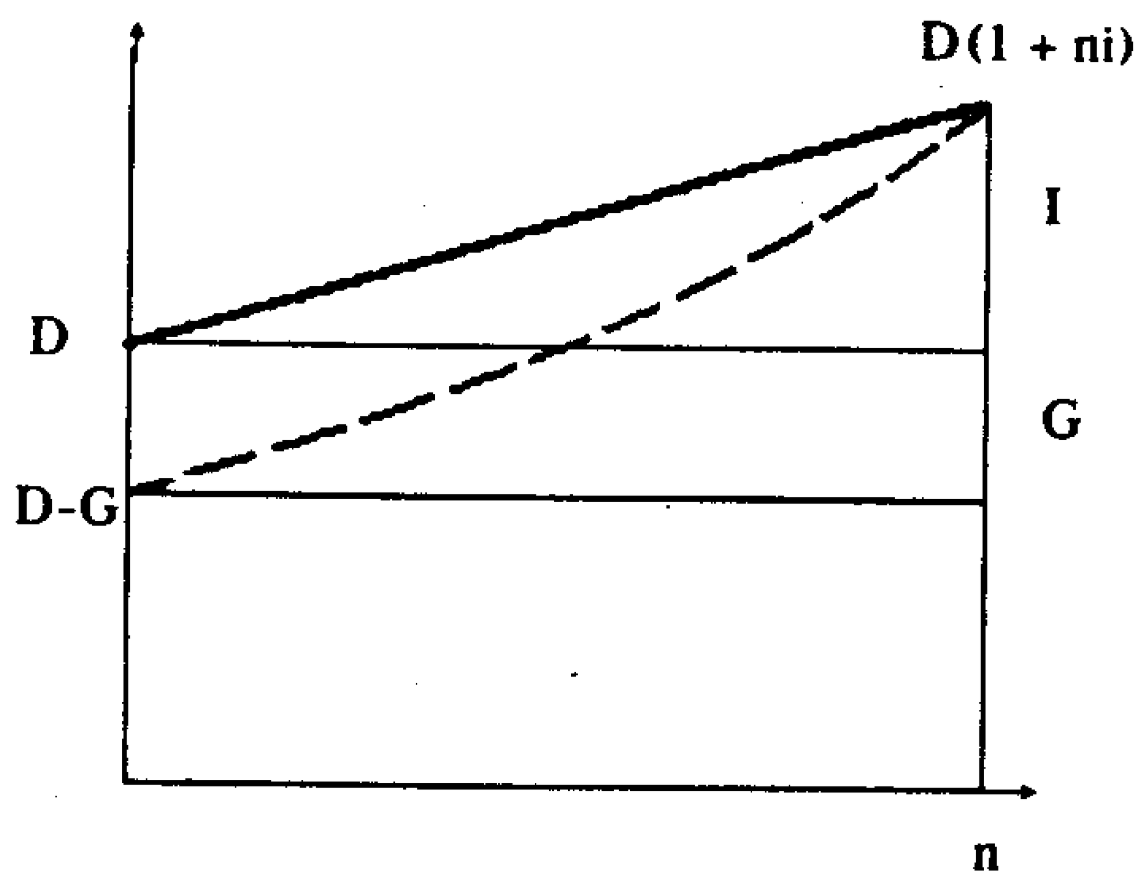

Рис. 8.2

Графическое изображение данной сделки (контур) показано на рис. 8.2.

Пусть $G=D(1-g)$, где g — относительная величина комиссионных в сумме кредита, тогда

$$i_э=\left(\frac{1+ni}{1-g}\right)^{1/n}-1. \quad (8.2)$$

При расчете $i_э$ будем полагать, что временная база всегда 365 дней. При начислении процентов на сумму ссуды полагаем, что K = 360 или 365 дней.

Ставка $i_э$ не фигурирует в условиях операции, она полностью определяется ставкой процентов и относительной величиной комиссионных при заданном сроке сделки.

Положим, что необходимо охарактеризовать доходность в виде ставки простых процентов ($i_{эп}$). В этом случае на основе соответствующего балансового уравнения находим

$$i_{эп}=\frac{1+ni}{(1-g)n}-1. \quad (8.3)$$

Пример 8.1. При выдаче ссуды на 180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? Пусть при начислении процентов K = 365, тогда по формуле (8.1) находим

$$i_э=\left(\frac{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}08}{1-\frac{0{,}5}{100}}\right)^{365/180}-1=0{,}0927 \text{ или } 9{,}27\%,$$

т. е. комиссионные увеличили доходность на 1,27 процентных пункта. Полученный показатель доходности можно интерпретировать как скорректированную цену кредита.

Изменим условия примера. Пусть теперь срок ссуды — 2 года, тогда

$i_э=0{,}0797$, т. е. 7,97% (без учета комиссионных доходность данной ссудной операции равна 7,7%) #1

Если ссуда выдается под сложные проценты, то исходное уравнение для определения $i_э$ имеет вид

$$(D-G)(1+i_э)^n=D(1+i)^n.$$

Следовательно,

$$i_э=\frac{1+i}{(1-g)^{1/n}}-1. \quad (8.4)$$

Пример 8.2. Как удержание комиссионных из расчета 1% суммы кредита увеличивает эффективность ссуды для кредитора при 5-летнем сроке?

Находим $\frac{1}{(1-0{,}01)^{1/5}}=1{,}002$, т. е. на 0,2%; при 10-летнем сроке — на $\frac{1}{(1-0{,}01)^{1/10}}=0{,}001$, или 0,1%.

#2

Учетные операции. Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке (см. 1.4), то эффективность сделки без удержания комиссионных определяется по формуле эквивалентной ставки (3.1). При удержании комиссионных и дисконта заемщик получает сумму $D-Dd-G$. Если дисконт определяется по ставке простых процентов, то эта сумма составит $D(1-n'd-g)$. Контур операции показан на рис. 8.3. Балансовое уравнение в данном случае имеет вид

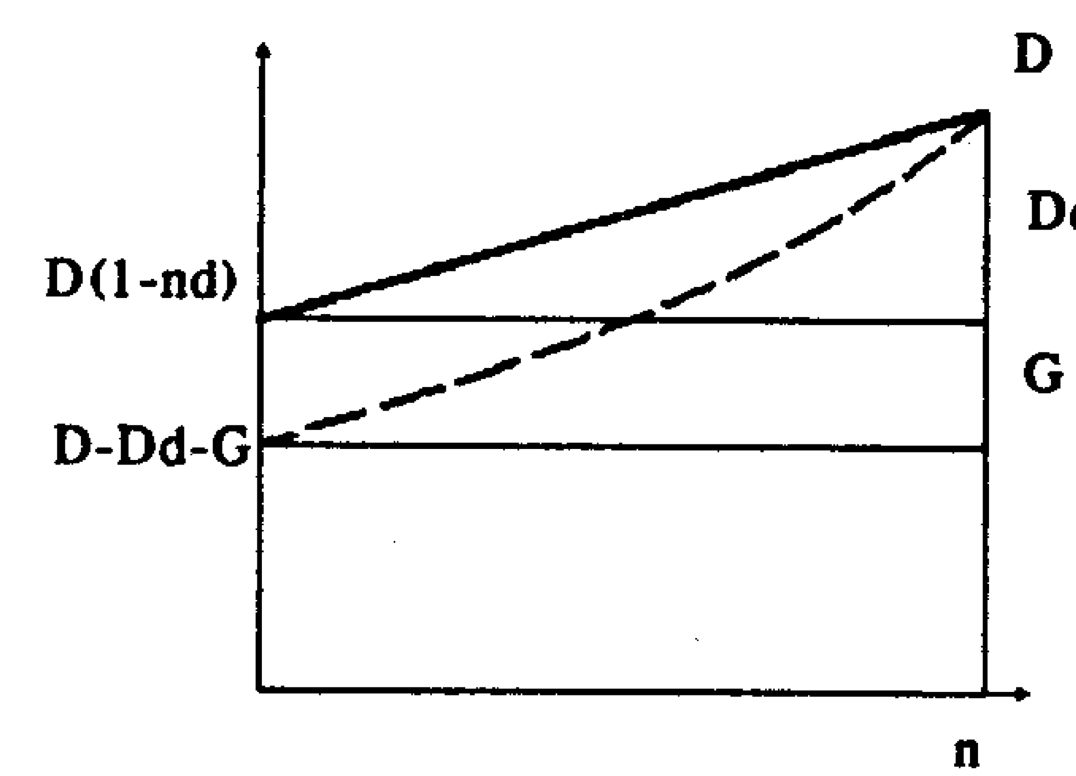

Рис. 8.3

$$D(1-n'd-g)(1+i_э)^n=D.$$

Откуда

$$i_э=\left[\frac{1}{1-n'd-g}\right]^{1/n}-1, \quad (8.5)$$

где n — срок, определяемый для искомого показателя доходности; n' — срок, определяемый при учете долгового обязательства.

Для полного показателя доходности в виде $i_{эп}$ находим

$$i_{эп}=\frac{1}{(1-n'd-g)n}-1. \qquad (8.6)$$

Временная база при расчете $i_э$ принимается равной 365 дням, в учетной операции — 360 или 365 дням (подробнее см. 1. 2 и 1. 3).

Пример 8.3. Вексель учтен по ставке d = 10% за 160 дней до его оплаты. При выполнении операции учета с владельца векселя удержаны комиссионные в размере 0,5%. Доходность операции согласно (8.4) (при условии, что временная база учета 360 дней) составит

$$i_э=\left(\frac{1}{1-\frac{160}{365}0{,}1-0{,}005}\right)^{365/160}-1=0{,}123, \text{ т. е. } 12{,}3\%.$$

Эффективность без удержания комиссионных — 10,8%.

#3

Во всех рассмотренных случаях искомая ставка $i_э$ представляет собой частный случай упомянутой выше ПД. Заметим, что влияние комиссионных на $i_э$ уменьшается по мере увеличения срока сделки.

Удержание комиссионных — не единственная возможность изменения фактической суммы инвестиций по сравнению с номиналом. В практике возможны случаи, когда инвестор несет дополнительные расходы, например, приобретая опцион на право купить ценную бумагу. Такие расходы, очевидно, формально можно рассматривать как комиссионные с обратным знаком ($-G$) и для расчета применять полученные выше формулы (8.2)-(8.6). Естественно, что при этом уменьшается показатель полной доходности.

Пример 8.4. Всеросийский Биржевой Банк выпустил в обращение расчетный депозитный сертификат (в виде монеты) достоинством 5 тыс. руб. с условиями: продажа по нумизматической стоимости, опцион на право покупки 50 руб.; сертификаты принимаются к оплате ВББ по номиналу до 30.12.1996г. и по двойному номиналу с 31.12.1996г.

Поставим перед собой задачу определить доходность инвестиций в такой сертификат, разумеется, без учета нумизматической ценности монеты. Инвестор, как было показано, несет дополнительные расходы по приобретению опциона, т. е. G= -50 и g= -0,01. Учтем также, что

в первые пять лет i = 0. Допустим, что монета будет реализована в качестве платежного средства в ВББ через четыре года после ее выпуска, получим

$$i_э=\left(\frac{1}{1-(-0{,}01)}\right)^{1/4}-1=-0{,}002 \text{ т. е. } -0{,}2\%.$$

При наступлении права получить двойной номинал имеем

$$i_э=\left(\frac{2}{1-(-0{,}01)}\right)^{1/5}-1=0{,}1464 \text{ т. е. } 14{,}64\%.$$

#4

При рассмотрении рисунков 8.2-8.3 становится очевидным, что контур финансовой операции, основанный на договорной ставке i, может быть дополнен контуром по ставке $i_э$ (или $i_{эп}$), как это и показано на рисунках. Это позволяет лучше понять сущность ПД, по крайней мере, в рамках рассмотренных простых сделках. Кроме того, становится очевидным вклад комиссионных в общий доход по сделке.

8.4 Доходность купли-продажи финансовых инструментов.

Краткосрочные финансовые инструменты денежно-кредитного рынка — векселя, тратты, различные депозитные сертификаты и т. д. могут быть проданы до наступления срока их оплаты. Владелец при этом получает некоторый доход или в неблагоприятных условиях — несет убытки.

Покупка и продажа векселя. Если вексель или другой вид долгового обязательства через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить в виде простых или сложных процентов. Финансовая результативность операции здесь связана с разностью цен купли-продажи, которые в свою очередь определяются сроками этих актов до погашения векселя, и уровнем учетных ставок. Покажем это. Пусть номинал векселя равен S рублей. Он был куплен (учтен) по учетной ставке d_1 за ∂_1 дней до наступления срока.

Цена в момент покупки составила $P_1=S(1-\frac{\partial_1}{K}d_1)$, где K — временная база учета. За ∂_2 дней до погашения вексель был продан с дисконтированием по ставке d_2: $P_2=S(1-\frac{\partial_2}{K}d_2)$. Инвестиции в начале операции составили, таким образом, P_1 руб., отдача от них P_2 руб. Операция продолжалась $\partial_1-\partial_2$ дней. Наращение вложений за указанный срок по простой или сложной годовой ставке, которую принимают в качестве меры эффективности, должно дать конечный результат, т. е. P_2. Так для простой ставки $i_{эп}$ получим следующее балансовое уравнение

$$P_1(1+\frac{\partial_1-\partial_2}{K}i_{эп})=P_2. \tag{8.7}$$

Откуда доходность купли-продажи векселя (в виде ставки простых процентов)

$$i_{эп}=\frac{P_2-P_1}{P_1}\cdot\frac{K}{\partial_1-\partial_2}\ . \tag{8.8}$$

Выразив P_1 и P_2 через определяющие эти величины параметры, находим

$$i_{эп}=\left(\frac{1-\partial_2 d_2/K}{1-\partial_1 d_1/K}-1\right)\cdot\frac{K}{\partial_1-\partial_2}. \tag{8.9}$$

Для того чтобы операция не была убыточной, необходимо чтобы

$$\partial_2 d_2<\partial_1 d_1 \quad \text{или} \quad P_1<P_2.$$

Аналогично поступает и при использовании в качестве меры эффективности годовой сложной ставки. В этом случае, полагая $K = 365$, на основе балансового уравнения

$$P_1(1+i_э)^{(\partial_1-\partial_2)/365}=P_2 \tag{8.10}$$

$$\text{получим } i_э=\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{365/(\partial_1-\partial_2)}-1. \tag{8.11}$$

Заметим, что уравнение (8.10) и сходное по содержанию (8.7) пригодны для оценки $i_э$ или $i_{эп}$ в ситуациях, когда речь идет о покупке — продаже финансового инструмента (приносящего доход в любой форме) и известны цены и длительность владения (holding period).

Заменив P_2 и P_1 на адекватные выражения, находим

$$i_э=\left(\frac{K-\partial_2 d_2}{K-\partial_1 d_1}\right)^{365/(\partial_1-\partial_2)}-1. \tag{8.12}$$

Реальная доходность (т. е. когда $i_э>1$), как и в случае с простыми процентами, будет иметь место, если $\partial_2 d_2<\partial_1 d_1$ или $P_2>P_1$. В противном случае операция приносит убыток. Нетрудно догадаться, что операция будет доходной до тех пор пока

$$d_2<\frac{\partial_1}{\partial_2}\cdot d_1.$$

Пример 8.5. Вексель куплен за 167 дней до его погашения, учетная ставка — 6%. Через 40 дней его реализовали по учетной ставе 5,75%. Эффективность, выраженная в виде простой годовой ставки процентов (временная база учета K=360), составит:

$$i_{эп}=\left(\frac{1-\frac{167}{360}0{,}06}{1-\frac{127}{360}0{,}0575}-1\right)\cdot\frac{365}{40}=0{,}0708.$$

Эффективность операции, измеренная в виде ставки сложных процентов, равна:

$$i_э=(1+\frac{40}{365}0{,}0708)^{365/40}-1=0{,}0731.$$

Эту же величину получим и непосредственно по формуле (8.12)

$$i_э=\left(\frac{360-127\cdot 0{,}0575}{360-167\cdot 0{,}06}\right)^{40/365}-1=0{,}0731.$$

Продолжим пример. Определим допустимый предел для учетной ставки, применимой при продажи векселя (d_2). Находим, что для того, чтобы операция купли-продажи векселя принесла некоторый доход, учетная ставка d_2 должна быть меньше, чем

$$\frac{167}{127}0{,}06=0{,}0788976.$$

#5

Покупка и продажа финансового инструмента, приносящие простые проценты. Если депозитный сертификат или другой подобного рода краткосрочный инструмент через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения вновь продан, то эффективность (доходность) такой операции можно измерить в виде ставки простых или сложный процентов. Финансовая эффективность такой операции зависит от сроков актов купли-продажи до погашения инструмента, цен или процентных ставок, существующих на денежном рынке в моменты покупки и продажи.

Несколько слов о депозитных сертификатах. Они, как известно, выпускаются банками как кратко-, так и среднесрочные финансовые инструменты. Продаются в момент выпуска по номиналу (at par) и предусматривают выплату процентов, начисляемых по простым или сложным ставкам. Проценты чаще всего выплачиваются один раз в конце срока. В случае досрочной продажи сертификата эмитенту иногда предусматриваются штрафные санкции. Например, удержание процентов за 1-3 месяца. Сертификаты являются объектом инвестиций и могут быть проданы на рынке ценных бумаг.

Цена сертификата при выпуске равна номиналу и, следовательно, он обеспечивает владельцу доходность на уровне объявленной процентной ставки в том случае, когда сертификат находится у владельца полный срок. Иное дело, если этот финансовый инструмент продается на рынке ценных бумаг.

Обратимся к наиболее распостраненному виду сертификата — с разовой выплатой процентов — и рассмотрим три возможных варианта операции купли-продажи этого инструмента по срокам:

а. покупается по номиналу, продается за ∂_2 дней до погашения,

б. покупается после выпуска и погашается в конце срока,

в. покупается и продается в пределах срока.

Для случая «а» получим знакомое равенство(8.7)

$$P_1\left(1+\frac{\partial_1-\partial_2}{K}\cdot i_{эп}\right)=P_2,$$

где P_1 — номинал, P_2 — цена продажи, ∂_1, ∂_2 — сроки погашения.

Доходность владения сертификатом в течение $\partial_1-\partial_2$ дней определяется формулой (8.8), если расчет исходит из цен сертификата. Если же в качестве исходных параметров берутся процентные ставки, i_1 и i_2 (i_1 — объявленная ставка, i_2 — ставка рынка в момент продажи), то

$$i_{эп}=\left(\frac{1+\frac{\partial_1}{K}i_1}{1+\frac{\partial_2}{K}i_2}-1\right)\cdot\frac{K}{\partial_1-\partial_2}, \qquad (8.13)$$

В случае, когда измерителем эффективности выступает сложная процентная ставка и заданы цены, получим формулу, аналогичную (8.12). Если же расчет основан на уровнях процентных ставок, то

$$i_э=\left(\frac{K+\partial_1 i_1}{K+\partial_2 i_2}\right)^{365/(\partial_1-\partial_2)}-1. \qquad (8.14)$$

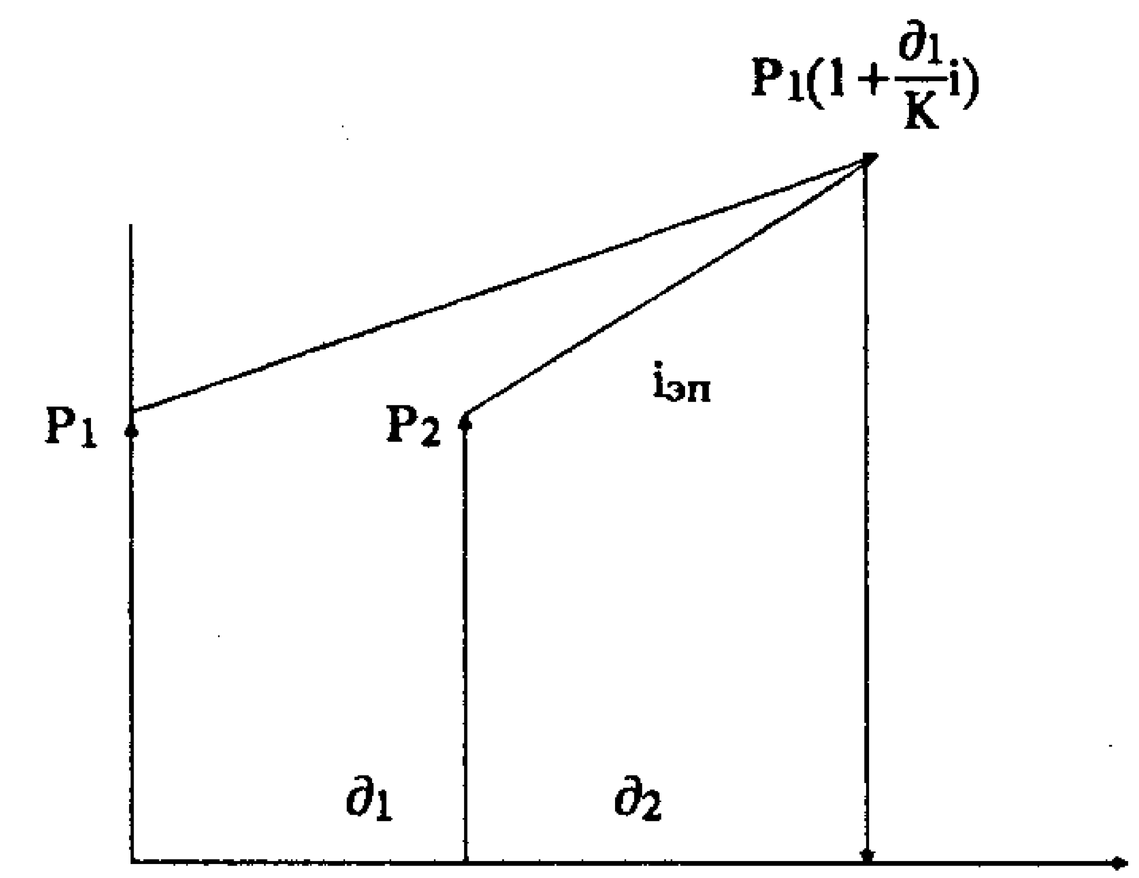

Рис. 8.4

Отметим, что доходность операции имеет место только в том случае, когда $\partial_1 i_1>\partial_2 i_2$.

Перейдем теперь к варианту «б». Здесь справедливо равенство

$$P_2\left(1+\frac{\partial_2}{K}i_{эп}\right)=P_1\left(1+\frac{\partial_1}{K}i\right),$$

где P_1 — номинал, P_2 — цена приобретения, i — объявленная процентная ставка.

Контур для данного уравнения приведен на рис. 8.4. Из приведенного равенства получим значение $i_{эп}$ при заданной величине P_2

$$i_{эп}=\left(P_1\frac{1+\frac{\partial_1}{K}i_1}{P_2}-1\right)\cdot\frac{K}{\partial_2}. \qquad (8.15)$$

Если в качестве измерителя эффективности принята ставка сложных процентов, то очевидно, что

$$i_э=\left(\frac{P_1\left(1+\frac{\partial_1}{K}i\right)}{P_2}\right)^{365/\partial_2}-1. \qquad (8.16)$$

Заметим, что в этом варианте эффективность означает доходность владения сертификатом, а не сделки купли-продажи.

Перейдем к последнему варианту, варианту «в». Здесь покупка производится спустя некоторое время после выпуска сертификата, а его продажа — до момента погашения. В этом случае опять приходим к уравнению (8.7), в котором P_1 означает цену приобретения (а не номинал). Отсюда для расчета $i_{эп}$ и $i_э$ пригодны формулы (8.8), (8.9), (8.10) и (8.11).

Нетрудно догадаться, что на величину $i_{эп}$ и $i_э$ в вариантах «а» и «в» влияют как срок владения инструментом, так и колебания процентных ставок.

Пример 8.6. Операция заключается в покупке сертификата за 1 020 руб. за 160 дней до его выкупа. Инструмент был продан за 1 060 руб. через 90 дней. Какова доходность операции, измеренная в виде простой и сложной ставки? Исходные данные: $P_1 = 1\,020$ руб., $P_2=1\,060$, $\partial_1=160$, $\partial_2=70$, $\partial_1-\partial_2=90$.

Пусть временная база простых процентов равна 365 дням, тогда по формуле (8.8) находим

$$i_{эп}=\frac{1060-1020}{1020}\cdot\frac{365}{90}=0{,}159, \text{ или } 15{,}9\%.$$

Эквивалентная сложная ставка равна

$$i_э=\left(1+\frac{90}{365}\cdot 0{,}159\right)^{365/90}-1=0{,}169, \text{ т. е. } 16{,}9\%.$$

Величину $i_э$ можно определить и непосредственно по формуле (8.11):

$$i_э=\left(\frac{1060}{1020}\right)^{365/90}-1=0{,}169.$$

#6

Пример 8.7. Финансовый инструмент, приносящий постоянный процент, куплен за 200 дней до срока его погашения и продан через 100 дней. В момент покупки процентная ставка на рынке была равна 10%, в момент продажи — 9,8%. Доходность операции купли-продажи в виде годовой ставки сложных процентов равна согласно (8.14)

$$i_э=\left(\frac{365+200\cdot 0{,}1}{365+100\cdot 0{,}098}\right)^{365/100}-1=0{,}103, \text{ т. е. } 10{,}3\%.$$

#7

Пример 8.8. Сертификат с номиналом 100 тыс. руб. с объявленной доходностью 12% годовых (простые проценты) сроком 720 дней куплен за 110 тыс. руб. за 240 дней до его оплаты. Какова доходность (в виде $i_э$) вложения до конца срока?

Если $K=360$ дней, то по формуле (8.16) получим

$$i_э=\left(100\frac{1+\frac{720}{360}\cdot 0{,}12}{110}\right)^{365/240}-1=0{,}19985, \text{ т. е. } 19{,}985\%.$$

#8

8.5. Потребительский кредит

Метод начисления процентов в потребительском кредите с равномерным его погашением во времени рассмотрен в главе 1. Реальная доходность такого вида ссуды в виде годовой ставки сложных процентов на инвестированные в операцию средства должна определяться с учетом фактического остатка задолженности после каждого платежа по кредиту. Погасительные платежи представляют собой постоянную p-срочную ренту. Таким образом, оценка искомой ставки сводится к расчету коэффициента приведения такой ренты по данным, характеризующим условия потребительского кредита. Затем, на основе полученного коэффициента приведения, рассчитывается искомая ставка.

Как было устанвовлено в главе 1, каждый раз должник в счет погашения выплачивает сумму $y=D\frac{1+ni}{pn}$. Годовая сумма платежей (член ренты) равна yp. Приравняем современную величину платежей (дисконтируя по неизвестной ставке $i_э$) сумме долга: $D=ypa^{(p)}_{n;i_э}$. Откуда

$$a^{(p)}_{n;i_э}=\frac{n}{1+ni}, \tag{8.17}$$

где i — ставка простого процента, принятая при расчете задолженности по потребительскому кредиту.

Значение $i_э$ расчитывают по $a^{(p)}_{n;i_э}$ одним из приближенных методов, рассмотренных в 4.4. Получаемая при решении (8.17) относительно $i_э$ ставка годовых сложных процентов заметно больше ставки, примененной при кредитовании (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Доходность потребительского кредита в виде годовой ставки сложных процентов, %

Число лет кредита	Годовая ставка за кредит, %		
	4	5	8
3	7,8	9,7	15,6
4	7,6	9,5	15,4
5	7,5	9,2	15,1

Пример 8.9 Потребительский кредит выдан на 3 года на сумму 10 тыс. руб. по ставке 10% годовых. Общая сумма задолженности составит

$10000(1+3\cdot 0,1)=13000$ руб. Погасительные платежи образуют постоянную ренту, коэффициент приведения которой

$$a_{3;i_э}^{(12)}=\frac{3}{1,3}=2,3077.$$

Искомая ставка составит 19,46%. В приведенном примере действительная ставка процентов по потребительскому кредиту почти в два раза превысила объявленную в договоре ставку. Обнаруженное почти двукратное превышение действительной ставки над объявленной ставкой процентов с небольшими вариациями сохраняется и, как видно из таблицы 8.1, при других ставках и сроках кредита.

На первый взгляд большой разрыв между номинальной и действительными ставками (10 простых и 19,5 сложных процентов) представляется в какой-то мере парадоксальным. Однако никакого парадокса здесь нет: 10% начисляются на неизменную сумму первоначального долга, в действительности же долг последовательно уменьшается во времени. Потребителя заставляют платить и за кредит, которым он фактически не пользуется.

#9

8.6 Долгосрочные ссуды

Выбранный способ погашения долгосрочной задолженности (планы погашения такой задолженности см. в гл. 7) оказывает заметное влияние на эффективность соответствующей финансовой операции для кредитора. Простейший случай, когда долг погашается разовым платежом с процентами, рассмотрен в 8.2. Ниже описываеются методы определения доходности: 1) когда проценты погашаются последовательными платежами, а основная сумма долга выплачивается в конце срока и 2) когда долг и проценты погашаются последовательно на протяжении всего срока ссуды. В обоих случаях предусматривается выплата комиссионных.

Ссуды с периодической выплатой процентов. Если комиссионные не выплачиваются, то доходность равна годовой ставке сложных процентов, эквивалентной любым применяемым в сделке процентным ставкам. Ситуация усложняется, если имеется еще один источник дохода — комиссионные. Пусть ссуда D погашается через n лет, проценты по простой процентной ставке i выплачиваются регулярно в конце года. Проценты в таком случае равны Di. Должнику с учетом комиссионных выдается ссуда в размере $D(1-g)$. Балансовое уравнение, полученное дисконтированием всех платежей по неизвестной ставке $i_э$ имеет вид:

$$D(1-g)-(Di\sum_{j=1}^{n}v^j+Dv^n)=0.$$

Здесь $v=(1+i_э)^{-1}$, $\sum v^j=a_{n;i_э}$. Теперь это уравнение можно представить в виде функции от $i_э$ следующим образом

$$f(i_э)=v^n+ia_{n;i_э}-(1-g)=0. \qquad (8.18)$$

Если проценты выплачиваются p раз в году, то

$$f(i_э)=v^n+\frac{i}{p}a_{n;i_э}^{(p)}-(1-g)=0. \qquad (8.19)$$

Задача, следовательно, заключается в нахождении корня степенной функции.

Пример 8.10. На три года выдана ссуда в 1 млн. руб. под 10% годовых, проценты выплачиваются ежегодно. При выдаче ссуды сделана скидка в пользу владельца денег в размере 5%. В результате должник получил 950 тыс. руб. Для расчета искомой ставки $i_э$ сразу можно написать функцию от $i_э$:

$$f(i_э)=(1+i_э)^{-3}-0,1\cdot a_{3;i_э}-0,95=0.$$

Решение, например, методом Ньютона-Раффсона или простым подбором дает $i_э=1,12088$. Таким образом доходность операции для кредитора и, соответственно, цена кредита для должника в виде годовой ставки сложных процентов равна 12,088%.

По-видимому, здесь уместно произвести проверку результата и описать процесс погашения ссуды исходя из найденного значения процентной ставки. Итак, долг в размере 950 тыс. руб. вырастает за первый год до $950\cdot 1,12088=1064,84$, после первой уплаты задолженность составит 964,68; на конец второго года имеем $964,84\cdot 1,12088-100=$ $=981,47$ и, наконец, в последнем году, сумма, подлежащая уплате, равна $981,47\cdot 1,12088=1100$ тыс. руб.

#10

Ссуды с периодическими расходами. Пусть по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем суммма расходов постоянна. Тогда балансовое уравнение для случая, когда платежи производятся в конце года, можно представить в виде

$$D(1-g)-Ra_{n;i_э}=0,$$

где R — ежегодная сумма по обслуживанию долга (срочная уплата).

Поскольку, $R=\frac{D}{a_{n;i}}$ (см. 7.11), то

$$f(i_э)=a_{n;i_э}-a_{n;i}(1-g)=0. \qquad (8.18)$$

Аналогично для случая, когда погасительные платежи осуществляются p раз в году, находим

$$f(i_э)=a^{(p)}_{n;i_э}-a^{(p)}_{n;i}(1-q)=0. \qquad (8.19)$$

где $a^{(p)}_{n;i_э}$ и $a^{(p)}_{n;i}$ — коэффициенты приведения годовой и p-срочной ренты, члены которой равны расходам должника по ссуде.

Пример 8.11. Пусть в примере 8.10 задолженность погашается равными платежами. Все остальные условия не изменяются. В этом случае согласно (8.18)

$$a_{3;i_э}=a_{3;10}(1-0{,}05)=2{,}48685\cdot 0{,}95=2{,}36251.$$

Расчет $i_э$ по заданному значению $a_{3;i_э}=2{,}36251$, можно легко осуществить с помощью линейной интерполяции. Поскольку $i_э>10\%$, то примем $i_н=12\%$ и $i_в=13\%$. Находим следующие табличные значения коэффициентов приведения: $a_{3;12}=2{,}38134$, $a_{3;13}=2{,}36115$. Приближенное значение ставки

$$i_э=12+\frac{2{,}38134-2{,}36251}{2{,}38134-2{,}36115}(13-12)=12{,}933\%.$$

#11

Нерегулярный поток платежей. Задолженность может быть погашена путем выплаты нерегулярного потока платежей: R_1, ... , R_n. Эффективность кредита при таком способе погашения определим на основе следующего уравнения, балансирующего вложения и отдачи:

$$f(i_э)=D(1-g)-\sum_{j=1}^{n}R_j v^{t_j}=0, \qquad (8.20)$$

где t_j — интервал от начала сделки до момента выплаты j-го погасительного платежа. Разумеется, платежи R_j должны точно соответствовать условиям сделки. Из условия сбалансированности сделки, находим, применяя договорную ставку i, величину последнего взноса:

$$R_n=Dq^T-\sum_{j=1}^{n}R_j q^{T_j}, \qquad (8.21)$$

где $q=1+i_э$, $T=\sum T_j$, T_j — срок от выплаты j-го платежа до конца сделки.

Продемонстрированный выше метод оценки показателя полной доходности на основе функции $f(i_э)$ применяется, в частности, в анализе облигаций и производственных инвестиций. В следующих главах мы обсудим эти проблемы.

8.7 Сравнение коммерческих контрактов

Постановка задачи. В коммерческой практике, в том числе во внешней торговле, сталкиваются с ситуациями, когда один и тот же товар можно купить у разных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи. Кредит при такой сделке может быть предоставлен самим поставщиком (коммерческий кредит) или третьей стороной (банком или другой финансовой организацией). Условия кредита обязательно должны приниматься во внимание при выборе контракта, так как преимущество варианта с низкой ценой может быть «перекрыто» невыгодными для покупателя условиями кредитования (процентная ставка, продолжительность льготного периода и т. д.). Для удобства анализа продавец и кредитор далее рассматриваются как один контрагент, а условия продажи товара и кредита — как условия контракта.

При наличии нескольких поставщиков товара, каждый из которых предлагает различные условия сделки (цену и условия кредитования) у покупателя возникает проблема выбора между ними. Разумеется проблема сравнения и выбора условий контракта не ограничивается сделкой купли-продажи товара. Речь может идти и о выборе условий только погашения кредита. Сравнение контрактов, предусматривающих различные, часто непосредственно не сопоставимые финансовые условия, может быть осуществлено на основе характеристик, обобщающих эти условия. «Классический» подход, предложенный еще в прошлом веке и широко применяемый в настоящее время, заключается в сравнении современных величин всех платежей, предусматриваемых соглашениями (задача Клаузберга). Иначе говоря, все платежи приводятся к одному моменту времени, обычно к началу действия соглашения. Современную величину расходов в данной ситуации можно трактовать как денежную сумму, которая вместе с начисленными на нее процентами обеспечит все оговоренные контрактом платежи. Вариант с наименьшей современной величиной считается предпочтительным для должника при приемлемости всех прочих условий (технических, юридических, организационных и т. д.). В свою очередь кредитору предпочтительнее основывать свое решение на показателях полной доходности финансово-кредитных операций.

При расчете современных величин для сравнения контрактов центральным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование — *ставки сравнения*. Какую ставку сравнения следует принять в данной конкретной ситуации — дело экономического суждения и прогноза. При этом необходимо учитывать, что чем выше эта ставка, тем в большей мере отражается такой фактор, как время — более отдаленные платежи оказывают все меньшее влияние на современную величину затрат. Иначе говоря, увеличение ставки сравнения делает для инвестора более привлекатльными контракты с длительными сроками погашения задолженности. В зависимости от конкретной сложившейся обстановки влияние фактора времени может меняться, и то, что представлялось предпочтительным в одних условиях, может не оказаться таковым в других. В зарубежной практике при выборе ставки сравнения в принципе ориетрируются на существующий или ожидаемый усредненный уровень ссудного процента. Выбирают и более конкретные ориентиры — доходность определенных ценных бумаг, банковских операций и т. д. Так или иначе, но сравнение всех вариантов условий должно осуществляться на основе одной и той же ставки, которая в общем случае отличается от предусмотренных в контрактах ставок. Из сказанного выше следует, что рассчитанные по принятой ставке сравнения показатели являются условными. Однако установленный таким образом рейтинг контрактов оказывается довольно устойчив. Можно показать, что если современная величина платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое соотношение сохраняется и для других уровней ставки сравнения в случае, если они превышают наибольшую из ставок сравниваемых контрактов или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок.

При выборе предпочтительного для заемщика или покупателя варианта контракта может быть применен и другой метод, основанный на расчете *предельных* (критических) *значений параметров* соглашений (break-even analysis). Суть этого метода легко уяснить из следующего простого примера. Допустим существуют два варианта покупки товара в кредит. Первый поставщик продает по цене P_1, ставка за кредит i_1. Если один из двух параметров сделки у второго поставщика (P_2, i_2) не объявлен, то возникает возможность определить то его максимальное значение, при котором второй контракт будет конкурентоспособен.

Например, пусть $P_1 < P_2$. В этом случае имеется возможность определить максимальное допустимое значение i_2.

Сравнение условий кредита. Для начала рассмотрим задачу, в которой конкурентными являются условия погашения задолженности. Такая ситуация возникает, например, когда поставщик предлагает несколько вариантов оплаты поставки. Цена товара остается постоянной во всех вариантах. В общем случае, ставки могут быть разными — чем больше срок кредита, тем выше ставка. Каждый вариант контракта оговаривает следующие условия погашения задолженности: авансовые платежи (их суммы и моменты выплаты), продолжительность и условия выплат процентов в льготном периоде, срок погашения и, наконец, метод погашения задолженности. Задача, следовательно, сводится к расчету современных величин, учитывающих все эти условия, для сравниваемых потоков платежей.

Пример 8.12. Судостроительная фирма предложила уплатить за стоимость заказа 8 млн. долл. следующим образом:

Вариант 1. 5% — при заключении контракта, 5% — при спуске судна на воду (6 месяцев), далее в течение 5 лет равные расходы по обслуживанию долга. Льготный период не предусматривается.

Вариант 2. 5% — при заключении контракта, 10% — при спуске судна на воду, льготный период — 6 месяцев (выплата процентов в конце периода), погашение задолженности в течение 8 лет равными расходами.

Пусть процент за кредит одинаков в обоих случаях — 10% сложных годовых, при сравнении принята ставка 15%. Тогда можно написать

$$A_1 = Q_1 + Q_2 v^t + R a_{n;q} v^t,$$

$$A_2 = Q_1 + Q_2 v^t + D(1+i)^L v^{t+L} + R a_{n;q} v^{t+L},$$

где Q_1 и Q_2 — суммы авансовых платежей, t — срок выплаты второго авансового платежа, L — срок льготного периода, R — расходы по погашению задолженности, D — остаток задолженности, $v=(1+q)^{-1}$, q — ставка сравнения.

При определении ежегодных расходов по погашению задолженности будем исходить из того, что уплачивается сумма, равная цене за вычетом авансовых платежей: $D = P - (Q_1 + Q_2)$. Приравняв остаток долга современной величине расходов по его обслуживанию (см. 7.11), получим $R = D / a_{n;i}$. Теперь нетрудно определить искомые значения A. Находим остаток задолженности для первого варианта — D = 8000 -

(400 + 400) = 7200; ежегодные расходы — 7200 / $a_{5;10}$ = 7200 / 3,7907868 = 1899,342 тыс. долл.; коэффициент приведения по ставке сравнения $a_{5;15}$ = 3,3521551. Таким образом,

$$A_1=400+400\cdot 1{,}15^{-0{,}5}+1899{,}342\cdot 3{,}352151\cdot 1{,}15^{-0{,}5}=6710{,}149$$

тыс. долл.

Для второго варианта находим: D=8 000−(400+800)=6 800; проценты за льготный период 6 800·(1,1−1) = 302,615; ежегодные расходы 6 800/$a_{8;10}$ = 6800 / 5,3349262 = 1274,619; коэффициент приведения по ставке сравнения $a_{8;15}$ = 4,4873215. Тогда

$$A_2=400+800\cdot 1{,}15^{-0{,}5}+302{,}615\cdot 1{,}15^{-1}+$$

$$+\ 1274{,}619\cdot\ 4{,}4873215\ \cdot\ 1{,}15^{-1} =\ 6382{,}734 \text{ тыс. долл.}$$

Таким образом $A_2<A_1$.

Смысл оценок A_1 и A_2 очевиден — это те суммы, которые будучи инвестированы по ставке q в момент заключения контракта, полностью обеспечат все предусмотренные выплаты. Заметим, что даже относительно высокая доля аванса (отрицательный фактор для покупателя) во втором варианте не смогла перевесить преимущество более длительного срока погашения задолженности при условии $q<i$. Чем меньше q отличается от i, тем незначительнее преимущество второго контракта.

#12

Сравнение коммерческих контрактов. Расширим постановку задачи и включим сюда дополнительно различие в цене товара и уровне процентной ставки.

При разработке уравнений для определения современных величин необходимо иметь в виду несколько обстоятельств. Так важным условием, заметно влияющим на результаты (современную величину платежей), является установление момента времени, на который определяется задолженность и размер кредита и начинается его погашение. Если соглашение предусматривает разовую поставку товара, то задолженность обычно определяется на момент поставки. Если поставка распределена во времени и оговорены ее сроки, то в контрактах можно предусмотреть различные моменты времени для определения задолженности. Ниже рассматриваются методы сравнения при условии, что кредиты погашаются после полного выполнения обязательства по поставкам. Что касается авансовых платежей, то предполагается, что они могут быть выплачены в любой оговоренный момент (например, при заключении и завершении контракта, в некоторые промежуточные сроки). Предполагается, что при определении задолженности покупа-

теля на авансовые платежи проценты не начисляются. Если это не так, то ниже во всех формулах следует внести соответствующую корректировку.

При сравнении условий контрактов на основе современных величин расходов покупателя следует иметь в виду, что сроки поставок оказывают определенное влияние на эту величину. Увеличение срока поставки формально сокращает современную величину расходов покупателя, а выгода, которую может иметь покупатель от быстрой поставки, во внимание не принимается — учитываются только непосредственные финансовые условия контракта. Таким образом, однозначный результат сопоставления имеет место только тогда, когда сроки поставок сравниваемых вариантов одинаковы. Если же сроки разные, то и в этом случае расчет современных величин платежей по контрактам дает ценную информацию для принятия решения. На ее основе можно установить, во что обходится покупателю сокращение или удлинение срока поставки.

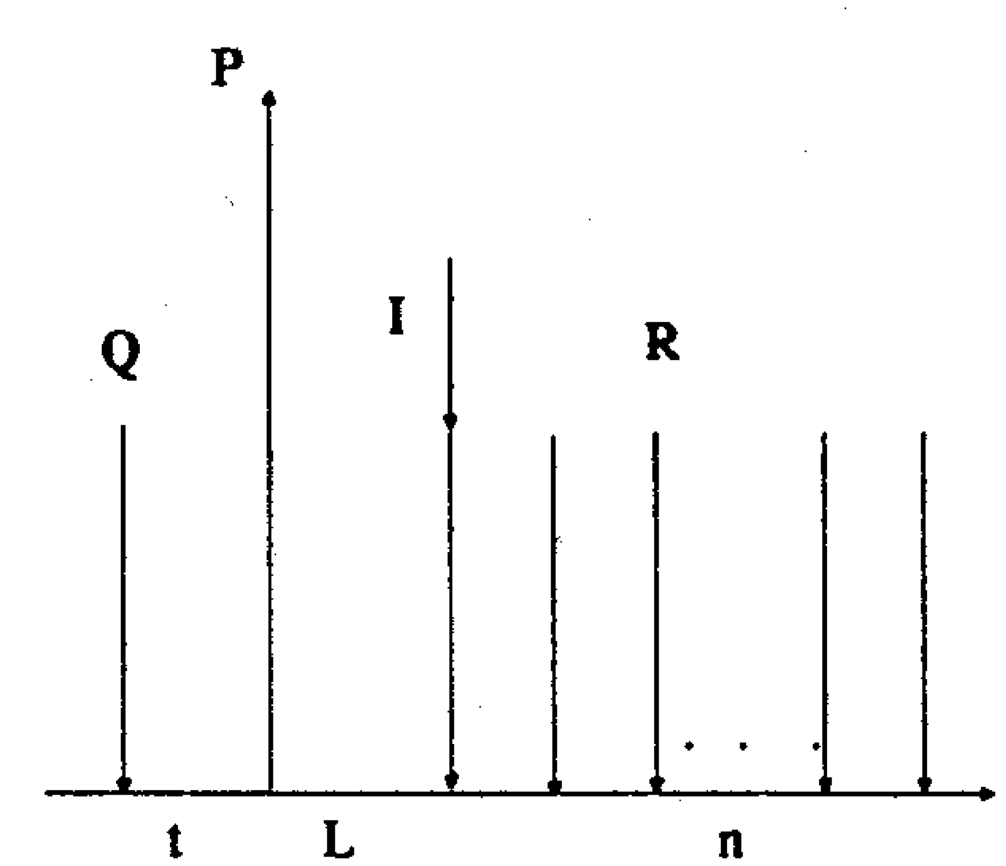

Рис. 8.5

Методы расчета необходимых значений современных величин потоков платежей, естественно, не будут отличаться от только что рассмотренных. Единственное отличие заключается в том, что суммы расходов по обслуживанию долга базируются на заданных в каждом контракте величинах. Пусть аванс выплачивается один раз в начале сделки, предусматривается разовая поставка товара, погашение долга производится равными уплатами, в льготном периоде проценты уплачиваются в конце срока. Распределение платежей во времени показано на рисунке 8.5. Современная величина по ставке q для данного случая составит

$$A=Q+Jv^{t+L}+Ra_{n;q}v^{t+L}, \tag{8.22}$$

где Q — сумма авансового платежа, $v=(1+q)^{-1}$, J — проценты в льготном периоде (выплачиваются в конце этого периода). Проценты, естественно, могут быть простыми и сложными, причем за базу их начисления можно принять величины $P-Q$ или $P-Q(1+ti)$, $P-Q(1+i)^t$; R — величина расходов по обслуживанию задолженности; если R — постоянная величина, то $R=(P-Q)/a_{n;i}$.

Выражение (8.22) написано для случая, когда платежи по погашению задолженности производятся в конце года, а проценты, в льготном периоде, как уже упоминалось, уплачиваются в конце этого периода. Разумеется, условия контракта могут быть другими. Соответственно другим будет и математическое описание процесса погашения. Допустим, что проценты определяются по сложной ставке:

$J=(P-Q)[(1+i)^L-1]$.Тогда, после простых преобразований (8.22) получим

$$A=Q+(P-Q)\left(\frac{a_{n;q}}{a_{n;q}}v^{t+L}+[(1+i)^L-1]v^{t+L}\right). \quad (8.23)$$

Если проценты периодически выплачиваются в льготном периоде, например, в конце года, то вместо (8.23) получим (при условии, что L — целое число)

$$A=Q+(P-Q)(\frac{a_{n;q}}{a_{n;i}}v^{t+L}+ia_{L;q}\cdot v^t). \quad (8.24)$$

Пример 8.13. Условия сравниваемых контрактов следующие:

	Вариант 1	Вариант 2
Цена, млн.руб.	10,5	11,0
Авансовые платежи, млн.руб.	2	1
Срок поставки, лет	1	1
Срок кредита, лет	8	10
Льготный период, лет	2	3
Ставка процента, %	10,5	10,0

Аванс в обоих вариантах выплачивается при подписании контракта. Срок кредита включает льготный период. Все условия, кроме срока поставки, в контрактах различны. Пусть годовые расходы покупателя по погашению задолженности постоянны. Ставка сравнения i = 15%. Приведем необходимые для расчета по формуле (8.24) значения коэффициентов и необходимых сумм.

Для варианта 1: $v^t=1{,}15^{-1}$ = 0,869565, $v^{t+L}=1{,}15^{-3}$ = 0,657516, $a_{6;10,5}$ = 4,292179; $a_{6;15}$ = 3,784483; $a_{2;15}$ = 1,625709; Q = 2; $P-Q$ = 8,5.

Для варианта 2: v^t = 0,869565, $v^{t+L}=1{,}15^{-4}$ = 0,571753; $a_{7;10}$ = 4,868419; $a_{7;15}$ = 4,16042; $a_{3;15}$ = 2,283225; Q = 1; $P-Q$ = 10.

Окончательно получим: A_1 = 8,189, A_2 = 7,871.

Преимущество варианта 2 при принятой для сравнения процентной ставке очевидно. Заметим, что ежегодные платежи по варианту 2 10/4,868419 = 2,05405.

Допустим теперь, что аванс в варианте 1 равен 1 млн. руб., а во втором — 2 млн., все остальные условия остаются прежними. Тогда ситуация изменяется: A_1 = 7,918, A_2 = 8,184.

Результат расчета современных величин в существенной мере зависит от принятой в анализе ставки сравнения. Однако полученный на основе современных величин рейтинг контрактов обладает высокой степенью инвариантности. Можно показать, что, если $A_1<A_2$ при некоторых заданных значениях i_1 и i_2, причем $i_1>i_2$, и принятой ставке сравнения q_0, то найденное соотношение A_1 и A_2 сохранится для всех других значений $q=q_0$ при условии, что $q_0>i_1$ или $q_0<i_2$.

#13

Выше был рассмотрен метод сравнения условий соглашений при разовой поставке товара. Принципиально ничего не меняется в методике, если поставки распределены во времени. Однако здесь возникает вопрос о том, как учесть размер и время поставок. Решение задачи, по-видимому, следует разделить на два этапа. На первом, на основе балансового уравнения определяются размеры погасительных платежей, на втором — исходя из найденных значений платежей рассчитывается современная величина. По-существу, оба эти этапа присутствуют и в случае, когда речь идет о разовой поставке. Однако там мы не обращали внимания на разработку балансового уравнения, так как расчет размеров погасительных платежей очевиден.

Напишем балансовое уравнение для контракта, который предусматривает последовательные поставки товара в объемах M_j и сроки T_j (общий срок $T=\sum T_j$), авансовые платежи в сумме Q_1 и Q_2, льготный период L (проценты периодически выплачиваются), оплата задолженности равными расходами в течение n лет. Тогда накопленная задолженность на конец срока поставки при условии, что на авансовые платежи начисляются проценты, составит

$$D=\sum_j M_j(1+i)^{T_j}-\sum_k Q_k(1+i)^{T_k},$$

T_j — время от момента поставки до конца срока поставок, T_k — время от момента выплаты авансового платежа до конца срока поставок, i — договорная процентая ставка.

Размер расходов по обслуживанию долга определяется как $R=\frac{D}{a_{n;i}}$. Современная величина совокупности платежей, при ставке сравнения, равной q определяется в данном случае как

$$A=Q_1+Q_2v^t+Ja_{L;q}v^T+Ra_{n;q}v^{T+L},$$

где t — срок выплаты второго авансового платежа, $a_{L;q}$ — коэффициент приведения ренты, состоящей из процентных платежей в льготном периоде.

Аналогичным образом можно разработать уравнение, определяющее современную величину расходов по контракту для любой другой ситуации.

Частные случаи сравнения контрактов. Если в общем случае сравнения контрактов без разработки соответствующих уравнений нельзя обойтись, то в частных случаях — когда нет полного набора условий — возможны ситуации, для которых можно вывести ряд формул, существенно облегчающих анализ.

Наиболее простая постановка задачи заключается в сравнении соглашений, в которых предусматривается единовременное погашение кредита в конце срока кредитования. Хотя эта задача элементарна и ее решение очевидно, все же рассмотрим ее, поскольку это необходимо для целостности дальнейшего изложения. Кроме того, даже при такой простой постановке некоторые результаты, получаемые в ходе анализа, не вполне очевидны и могут представлять определенный практический интерес. В чисто методических целях обратимся к случаю, когда сроки двух сравниваемых платежей одинаковы. Различаются цены ($P_1<P_2$) и ставки процентов за кредит ($i_1>i_2$). Если это не так, то задача сравнения не возникает — выбор очевиден. При выборе предпочтительного для покупателя варианта достаточно сравнить суммы накопленного долга (цена плюс проценты за кредит) S_1 и S_2 (рис. 8.6). Сравнение осуществляется без привлечения ставки сравнения q.

Немного сложнее задача сравнения в случае, когда сроки погашения кредита различны ($n_1\neq n_2$). Итак, имеются два соглашения со следующими условиями: P_1,i_1,n_1 и P_2,i_2,n_2. Пусть $P_1<P_2$, но $i_1>i_2$. Здесь логично сравнить значения дисконтированных платежей, так как непосредственное сравнение S_1 и S_2 теперь неправомерно — эти величины относятся к разным моментам времени. Для покупателя выгоднее

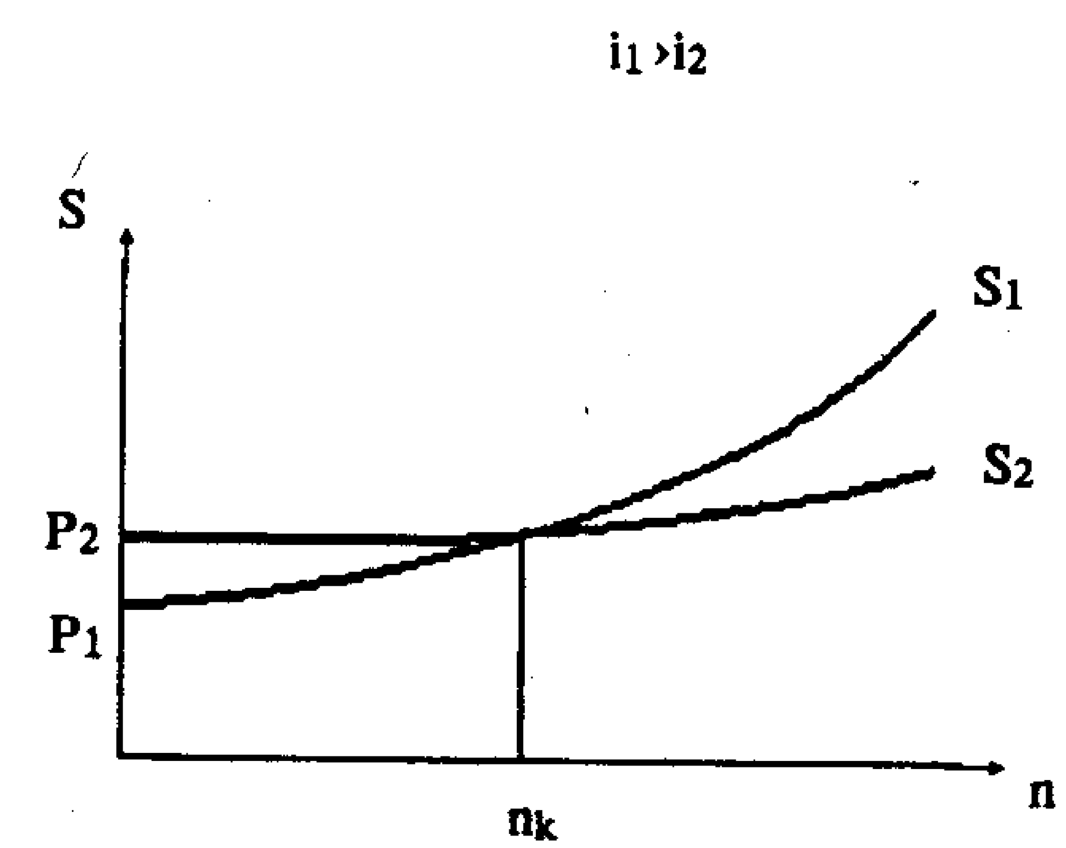

Рис. 8.6

вариант более дешевый, т.е. с наименьшей современой величиной. Интуитивно понятно, что при небольших сроках кредита преимущество для покупателя имеет вариант с меньшей ценой (в пределе, при $n_1=n_2=0$, сравнению подлежат лишь цены товаров). Чем больше срок кредита, тем больше преимущество низкой ставки. В какой-то момент n_k оба фактора уравновешивают друг друга.

По-видимому, не лишен интереса анализ факторов, влияющих на соотношение A_1 / A_2. Кратко остановимся на этом вопросе. Искомое соотношение можно представить в виде

$$\frac{A_1}{A_2}=P_1\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}:P_2\frac{1+i_2}{1+q}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2}}\cdot(1+q)^{n_2-n_1}.$$

Таким образом, выделены три фактора-сомножителя: первый характеризует степень влияния различий в ценах, второй — различий в ставках процентов (с учетом различий в сроках), третий — ставки сравнения q.

Пример 8.14. Для примера сравним следующие варианты условий внешнеторгового соглашания: P_1 = 10, i_1 = 10%, n_1 = 8 лет и P_2 = 12, i_2 = 9%, n_2 = 14 лет. Найдем современные величины для двух вариантов ставки сравнения:

$$q=10\%,\ A_1=21{,}44\cdot1{,}1^{-8}=10{,}00,\ A_2=40{,}1\cdot1{,}1^{-14}=10{,}56;$$

$$q=15\%,\ A_1=21{,}44\cdot1{,}15^{-8}=7{,}01,\ A_2=40{,}1\cdot1{,}15^{-14}=5{,}67.$$

Таким образом, при q = 10% предпочтительнее первый вариант, при q = 15% более дешевым для покупателя является второй вариант сделки.

При условии, что q = 15%, имеем

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{10}{12}\cdot\frac{1{,}1^8}{1{,}09^{14}}\cdot 1{,}15^{14-8}=0{,}833\cdot 0{,}641\cdot 2{,}313=1{,}235.$$

«Вклады» каждого фактора очевидны. Наибольшее влияние на результат здесь оказала ставка сравнения q. Уже при q = 11,1% оба сравниваемых варианта оказываются равноценными.

#14

К методу выбора наиболее дешевого варианта соглашения (цена плюс кредит, оплата в конце срока) можно подойти и по-иному. Предлагаемая нами методика заключается в подсчете некоторого срока кредита n_k, назовем его *критическим сроком*, и сравнении фактических сроков кредитов n_1 и n_2) с этой величиной. При определении n_k будем исходить из того, что n_k характеризует нейтральный момент во времени. Наращенные суммы долга оказываются равными у сравниваемых вариантов. В этой же точке равны и современные величины платежей (см. рис. 8.7). Сказанное дает основание написать равенство:

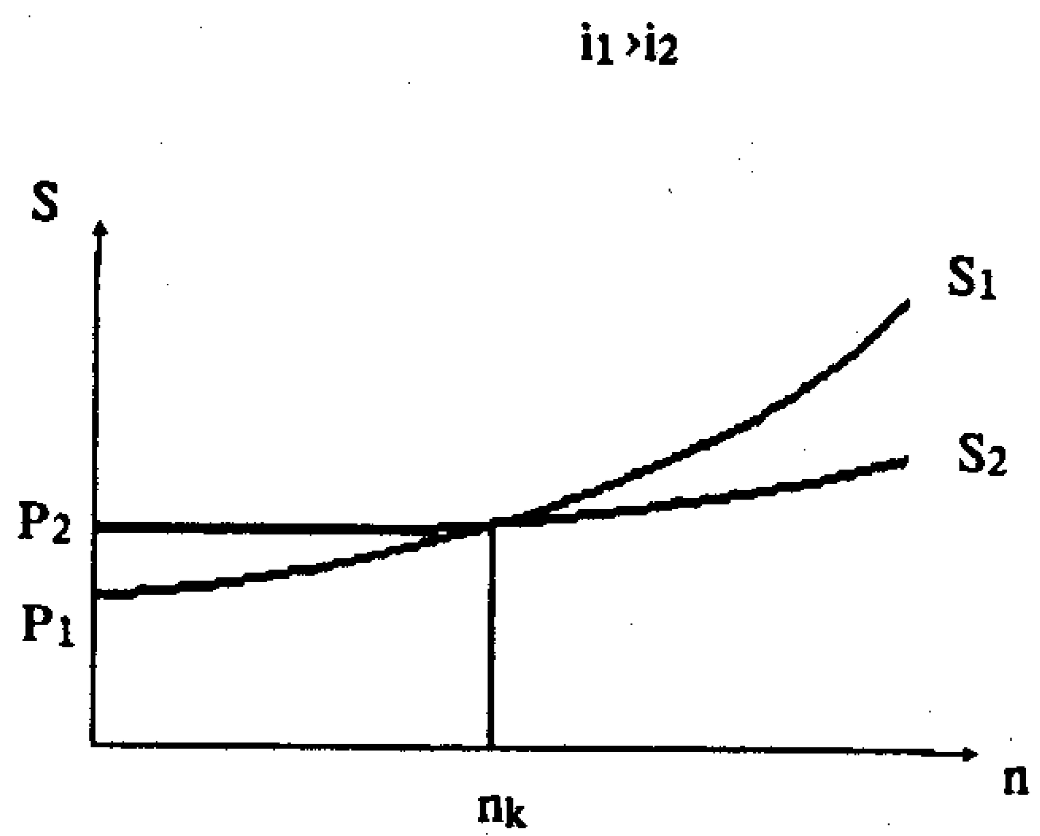

Рис. 8.7

$$P_1(1+i_1)^{n_k}=P_2(1+i_2)^{n_k},$$

откуда

$$n_k=\frac{\ln\dfrac{P_1}{P_2}}{\ln\dfrac{1+i_2}{1+i_1}}. \qquad (8.25)$$

Как же использовать n_k для выбора предпочтительного для покупателя варианта соглашения? Для ответа обратимся к графикам, характеризующим изменение современной величины в зависимости от P,i,n,q (рис.8.8,*а* - *в*). На рисунке показано изменение современной величины платежа A при условии, что $P_1<P_2$, $i_1>i_2$; причем на

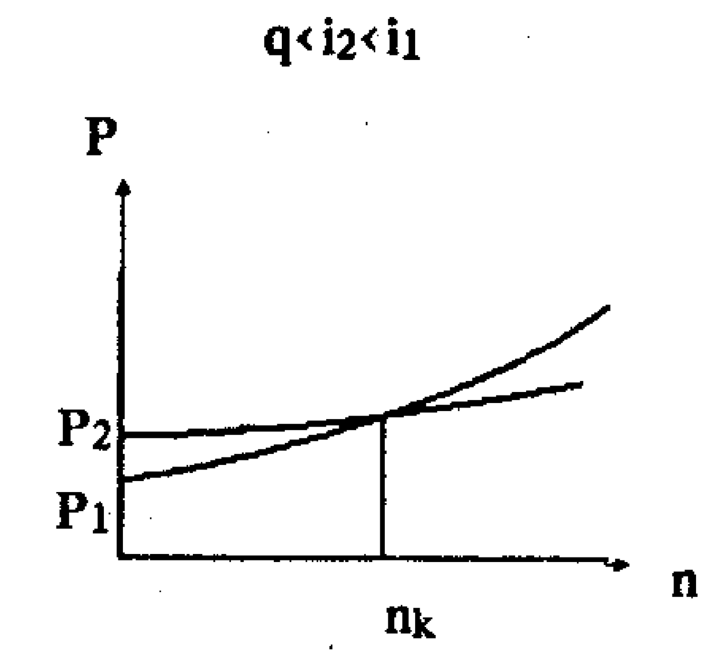

Рис. 8.8а

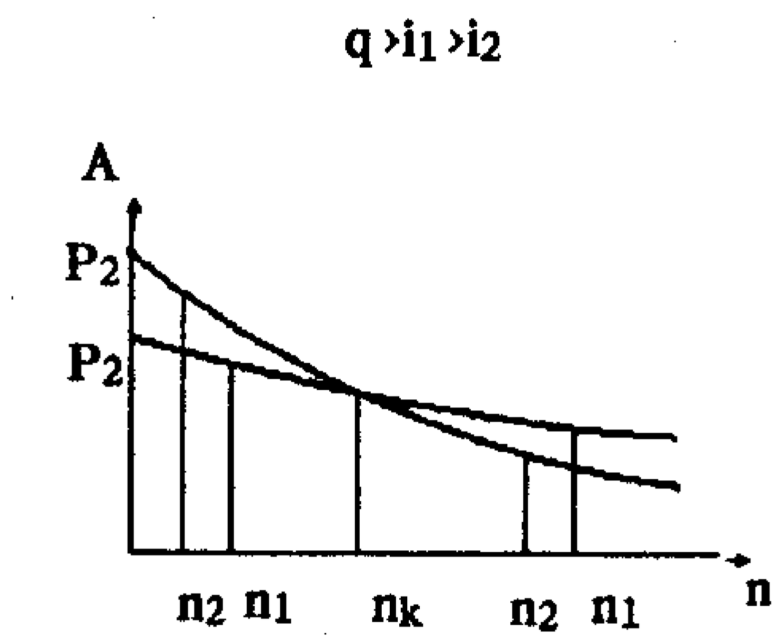

Рис. 8.8б

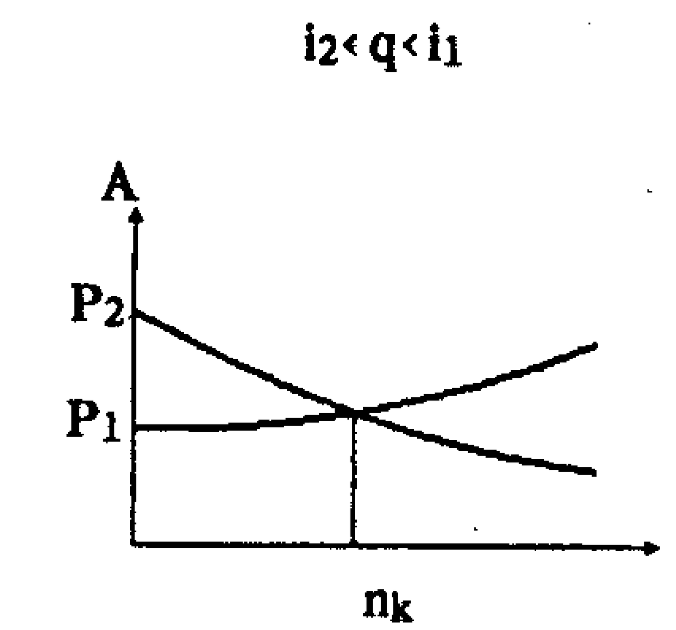

Рис. 8.8в

рис.8.8.*а* показан вариант, когда $q<i_2$, на рис.8.8.*б* — $q>i_1$, на рис.8.8.*в* — $i_2<q<i_1$. Правила выбора предпочтительного варианта, как нетрудно догадаться, будут зависеть от соотношения q и i_1,i_2 . Графики позволяют сформулировать правила выбора более «дешевого» для покупателя (и заемщика) варианта условий. Они приведены в табл.8.2.

Таблица 8.2.

Правила выбора предпочтительного варианта условий сделки

Номер правила	Соотношение сроков кредитов	$q>i_1>i_2$	$q<i_2<i_1$	$i_2<q<i_1$
1	$n_1<n_2<n_k$	-	1	1
2	$n_k<n_2<n_1$	-	2	2
3	$n_1<n_k<n_2$	2	1	-
4	$n_2<n_k<n_1$	1	2	-
5	$n_2<n_1<n_k$	1	-	1
6	$n_k<n_1<n_2$	2	-	2

Приведенные в таблице правила не охватывают все ситуации, например когда $n_2<n_1<n_k$ и $n_k<n_1<n_2$ для $q<i_2<i_1$. Строго говоря, и для этих случаев можно было бы найти некоторые правила, однако они сопряжены с дополнительными расчетами. Поэтому в данных случаях проще выбор вариантов осуществить, непосредственно сравнивая современные величины платежей по кредиту.

Преимущество предлагаемого метода выбора варианта заключается в относительно малой зависимости результата от величины ставки сравнения q. Как показано выше, достаточно определить эту величину лишь в виде неравентства $q>i_1>i_2$ или $q<i_2<i_1$. Кроме того, отпадает необходимость в расчете современных величин платежей.

Пример 8.15. Для данных предыдущего примера находим $n_k=\frac{\ln(10/12)}{\ln(1,09/1,1)}$ = 19,9 года. Соответственно для ставки сравнения, меньшей 9%, предпочтительным оказывается вариант с низкой ценой (правило 1 в табл.8.2 $n_1<n_2<19{,}9$). Если же ставка сравнения больше 10%, то это как раз тот случай, для которого правило не выведено и выбор следует основывать на результатах сравнения величин A_1 и A_2.

#15

Пример 8.16. Для того, чтобы продемонстрировать влияние сроков платежей, рассмотрим пример, в котором для одних и тех же значений цены и ставок процентов варианта соглашения заданы различные сроки (табл. 8.3).

Таблица 8.3.

	Условия варианта соглашения	
	1	2
Цена (P), млн.руб.	10	11,5
Ставка процентов, %	8,5	7
Срок, лет		
а)	9	7
б)	12	14
в)	12	9

Найдем критический срок n_k:

$$n_k=\frac{\ln(10/11{,}5)}{\ln(1{,}07/1{,}085)}=10{,}04.$$

Если бы срок соглашений равнялся 10,04 года, то оба варианта были бы равноценны в отношении финансовых последствий для покупателя и продавца-кредитора. Однако сроки различны. Сравним условия сделок для каждого варианта сроков, имея в виду, что $q>8{,}5\%$:

а) $n_2<n_1<10{,}04$ — предпочтителен вариант 1 (правило 5);
б) $10{,}04<n_1<n_2$ — “ “ 2 (правило 6);
в) $n_2<10{,}04<n_1$ — “ “ 1 (правило 4).

Для проверки рассчитаем современные величины платежей. Получим следующие результаты, млн.руб. (табл.8.4).

Таблица 8.4.

Сроки	Современные величины платежей	
	Вариант 1	Вариант 2
а) 9; 7	8,84	9,48
б) 12; 14	8,48	7,81
в) 12; 9	8,25	8,96

Таким образом, при сроках равных 9 и 7 лет, $A_1<A_2$, при сроках 12 и 14 лет — $A_1>A_2$, наконец при сроках 12 и 9 лет - $A_1<A_2$, что полностью согласуется с полученными выше результатами.

#16

Сопоставление условий контрактов, в каждом из которых задолженность погашается в конце срока, разумеется, возможный, однако крайне редкий случай. Кредиты обычно погашаются посредством выплаты последовательных платежей, чаще всего, но не обязательно, равномерно распределнных во времени. Как уже было показано выше, возможность сопоставления условий таких соглашений обеспечивается путем расчета и сравнения соответствующих современных величин. Если погашение задолженности производится постоянными суммами (имеются в виду расходы по обслуживанию долга), то соотношение современных величин расходов можно разложить на множители:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{a_{n_2;i_2}}{a_{n_1;i_1}}\cdot\frac{1-(1+q)^{-n_1}}{1-(1+q)^{-n_2}}.$$

Содержание первого множителя очевидно, второй характеризует влияние ставок процентов по кредиту и их сроков, третий — влияние принятой для сравнения ставки q.

Как было показано, выбор предпочтительного варианта при всех прочих равных условиях определяется значением q. В рассматриваемой ситуации (погашение кредита рентой без аванса) при выборе предпочтительно варианта можно также обратиться к критической величине срока кредита n_k. Последний определим исходя из следующего равенства (предполагающего, что в момент n_k $A_1=A_2$):

$$\frac{1-(1+i_1)^{-n_k}}{1-(1+i_2)^{-n_k}}=\frac{i_1}{i_2}\cdot\frac{P_1}{P_2}\,. \qquad (8.26)$$

Величина n_k здесь характеризует «нейтральный» срок. Она играет ту же роль, что и n_k в случае с разовым платежом (см.рис.8.7). Так же как и там, сравнение осуществляется в основном без привлечения ставки q, причем применяются те же правила выбора. Решение (8.26) относительно n_k можно получить с помощью какого-либо итерационного метода или иным путем.

В случае, когда в сравниваемых вариантах контрактов предусматривается выплата аванса и (или) льготный период, то разложить соотношение современных величин на множители не удается. Более того, не удается найти и критический срок n_k, поэтому имеется лишь один выход — расчет и сравнение современных величин.

8.8. Определение предельных значений параметров контрактов

Задача сравнения вариантов контрактов может быть решена и по-иному, путем определения параметра предельного (критического) значения цены или процентной ставки одного из двух сравниваемых вариантов контракта. Под предельным значением параметра понимается та его величина, при которой сравниваемый контракт оказывается конкурентоспособным относительно другого (базового) при сохранении остальных его условий. Такой подход к анализу покупатель может применить при определении допустимых значений цены или ставки процентов, когда есть возможность вести переговоры об изменении условий одного из сравниваемых контрактов. Предельные значения параметров обеспечивают равентство современных величин платежей покупателя по обоим контрактам и, следовательно, учитывают все условия этих контрактов.

Допустим, что один из поставщиков предлагает цену, которая меньше, чем у другого ($P_1<P_2$). Напомним, что в этом случае проблема выбора имеет место, когда $i_1>i_2$. Ставка i_2 не объявлена, и поэтому вместо сравнения современных величин платежей найдем теперь предельное максимальное значение ставки второго варианта (обозначим его как i_2^*), при котором второй поставщик будет конкурентоспособен. Тогда, при любой ставке i_2 , которая меньше i_2^* , второе соглашение оказывается предпочтительным. Аналогично можно найти максимально допустимое значение P_2 (обозначим его как P_2^*).

Заметим, что сфера приложения данного метода не ограничивается сравнением коммерческих контрактов. Он оказывается полезным во всех тех случаях, когда необходимо найти значение параметра, ограничивающего область приемлемых решений. Этот предел можно назвать *точкой равновесия* или критической точкой (break-even point).

Найдем предельные значения i_2^* и P_2^* для простой ситуации, когда предполагаются разовые расчеты по контракту в конце срока сделки без авансовых платежей. Тогда из условия равентства современных величин расходов по двум вариантам контракта

$$P_1\cdot\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{-n_1}=P_2\cdot\left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{-n_2}$$

находим

$$i_2^*=(1+q)\cdot\left[\frac{P_1}{P_2}\cdot\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{1/n_2}-1; \tag{8.27}$$

$$P_2^*=P_1\cdot\frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2}\cdot(1+q)^{n_1-n_2}}. \tag{8.28}$$

Правила выбора теперь очень просты: условия второго варианта хуже условий первого варианта при $i_2>i_2^*$, равноценны при $i_2=i_2^*$ и лучше при $i_2<i_2^*$ (предпочтительность рассматривается с позиции покупателя).

В свою очередь второе соглашение эквивалентно первому при $P_2=P_2^*$ и предпочтительнее в финансовом смысле при $P_2<P_2^*$. Значения i_2^* и P_2^*, как видим, существенно зависят от сроков кредитования и принятой ставки сравнения. В частном случае, когда $n_1=n_2=n$, обходимся без ставки сравнения q, а именно

$$i_2^*=(1+i_1)\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/n}-1, \tag{8.29}$$

$$P_2^*=P_1^*\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n}. \tag{8.30}$$

Пример 8.17. Условия соглашения: $P_1=1\ 000, i_1=18\%, n=5$ (начисление процентов раз в год). Если цена, предлагаемая другим поставщиком, равна 1 100, то граничное значение ставки процентов, компенсирующее высокую цену при данном сроке, составит

$$i_2^*=1{,}18\cdot\left(\frac{1\,000}{1\,100}\right)^{1/5}-1=0{,}1577.$$

#17

Для случаев, когда кредит погашается равномерными выплатами (равные срочные уплаты), предельные процентные ставки по кредиту находятся в два этапа. На первом этапе оценивают коэффициенты приведения рент, эквивалентные условиям базового контракта, на втором — на основе полученных коэффициентов приведения рассчитывают искомые предельные процентные ставки. Исходное равенство современных величин платежей имеет вид

$$R_1\frac{a_{n;q}}{a_{n_1;i_1}}=R_2\frac{a_{n_2;q}}{a_{n;i_2}}.$$

Отсюда

$$a_{n_2;i_2^*}=\frac{1-(1+i_2^*)^{-n_2}}{i_2^*}=\frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{a_{n_2;q}}{a_{n_1;q}}\cdot a_{n_1;i_1}.$$

На основе полученной величины $a_{n_2;i_2^*}$ находим искомое значение i_2^*. Величина P_2^* определяется существенно проще

$$P_2^*=P_1\cdot\frac{a_{n_2;i_2}}{a_{n_1;i_1}}\cdot\frac{a_{n_1;q}}{a_{n_2;q}}.$$

Пример 8.18. Условие базового варианта контракта: P_1 = 15 млн.руб., i_1 = 10%, срок — 8 лет, погашение задолженности равными платежами в конце года. Цена, предуматриваемая вторым контрактом — 16 млн.руб., срок кредита — 10 лет. При какой максимальной ставке этот вариант будет конкурентоспособен?

Зададимся ставкой сравнения q = 15%. Тогда

$$a_{10;i_2^*}=\frac{16}{15}\cdot\frac{a_{10;15}}{a_{8;15}}\cdot a_{8;10}=1{,}06667\cdot\frac{5{,}01877}{4{,}48732}\cdot 5{,}33493=6{,}36456.$$

Откуда критическое значение для ставки процентов второго варианта i_2^* = 9,19%.

Несколько изменим условия задачи. Пусть теперь заданы условия кредита (i_2 = 9%) и необходимо оценить предельное значение цены, т.е. P_2^*. Находим

$$P_2^*=15\cdot\frac{a_{10;9}}{a_{8;10}}\cdot\frac{a_{8;15}}{a_{10;15}}=15\cdot\frac{6{,}41765\cdot 4{,}48732}{5{,}33492\cdot 5{,}01877}=16{,}13.$$

#18

Применяя аналогичный подход, определим предельные значения процентной ставки и цены и для более сложных ситуаций. Например, если в контрактах предусматривается выплата аванса, то искомая величина коэффициента приведения (основанная на i_2^*) и предельная цена второго контракта находятся следующим образом

$$a_{n_2;i_2^*}=\frac{P-Q_2}{A_1-Q_2}\cdot a_{n_2;q},$$

$$P_2^*=(A_1-Q_2)\frac{a_{n_1;i_2}}{a_{n_2;q}}+Q_2.$$

Наконец, для вариантов с полным набором условий (выплатой аванса и льготным периодом) при условии, что проценты за льготный период присоединяются к сумме долга), получим

$$\frac{a_{n_2;i_2^*}}{(1+i_2^*)^t}=\frac{P_2-Q_2}{A_1-Q_2}a_{n_2;q}(1+q)^{-t}.$$

Определение i_2^* здесь не столь просто, а P_2^* находится элементарно:

$$P_2^*=\frac{A_1-Q_2}{a_{n_2;q}}\cdot a_{n_2;i_2}\left(\frac{1+q}{1+i_2}\right)^L+Q_2.$$

ГЛАВА 9. ЦЕННЫЕ БУМАГИ С ФИКСИРОВАННЫМ ДОХОДОМ

9.1. Облигации и их рейтинг

В системе денежно-кредитных отношений особое место занимают операции с ценными бумагами, приносящими фиксированный текущий доход (fixed income securities) в виде процентов, а иногда и дивидендов. К таким бумагам относятся прежде всего облигации, различного рода сертификаты, векселя и другие виды обязательств. Сюда же можно отнести и привилегированные акции, по которым выплачивается заранее обусловленный доход. К какому бы виду не относилась бумага, приносящая фиксированный текущий доход, последний обычно представляет собой постоянный аннуитет. Это общее свойство позволило осуществить их многоплановый количественный анализ. Пожалуй, ни один другой объект денежно-кредитного рынка не исследован так детально, как ценные бумаги с фиксированным доходом. Этому вопросу и посвящена данная глава.

Наиболее распространенным видом ценных бумаг с фиксированным доходом, как известно, является облигация, поэтому основное внимание здесь будет уделено именно этому виду ценных бумаг. Вместе с тем, и это необходимо подчеркнуть, большинство рассмотренных методов применимо и для других видов ценных бумаг с фиксированным доходом.

Облигации. При необходимости привлечения значительных денежных средств государство, муниципалитеты, банки или другие финансовые институты, а также отдельные фирмы или их объединения часто прибегают к выпуску и продаже облигаций. Под облигацией (bond) понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Облигация обеспечивает ее владельцу регулярное получение фиксированного дохода и в конце срока некоторой выкупной цены (обычно равной номиналу).

Основные параметры облигации: номинальная цена (номинал), выкупная цена или правило ее определения, если она отличается от номинала, дата погашения, норма доходности (cupon rate) и сроки выплаты процентов. Выплата процентов производится раз в году, по полугодиям или поквартально.

Определенное значение в совокупности условий облигации имеет наличие или отсутствие оговорки о запрете досрочного выкупа облигации (call protection). Наличие у эмитента права досрочного выкупа в определенном смысле снижает качество облигации, так как повышается степень неопределенности для инвестора.

Поскольку существует большое разнообразие облигаций, классифицируем их по нескольким признакам. Отсутствие соответствующего законодательства и достаточного опыта выпуска облигаций в стране не позволяет дать развернутую классификацию отечественных облигаций. Что касается зарубежных облигаций, то для них можно предложить следующие классификации.

а) по методу обеспечения различают:

- государственные облигации (government bonds), они обеспечиваются гарантией правительства страны (соответственно муниципальные — гарантией муниципалитетов);

- облигации частных корпораций (corporate bonds) — обязательства, обеспеченные залогом на имущество корпорации в виде ипотеки, передачей прав на недвижимое имущество, доходами от различных программ и проектов;

- облигации частных корпораций без специального обеспечения имуществом корпорации (corporate debentures).

б) по сроку: облигации с некоторой оговоренной датой погашения (day of maturity) и бессрочные, точнее, облигации без фиксированного срока — она может быть выкуплена в любой момент;

в) по методу погашения номинала:

- срочные облигации (term bonds) — погашение номинала или выкупной цены разовым платежом;

- облигации с распределенным по времени погашением, т.е. в указанном отрезке времени погашается некоторая доля номинала;

- облигации с последовательным погашением фиксированной доли общего количества облигаций (serial bonds); часто этот метод реализуется с помощью лотерей (лотерейные или тиражные займы).

В зависимости от метода выплаты доходов и способов погашения займа различают три вида облигаций (здесь и далее не рассматриваются облигации, которые погашаются с помощью тиражей):

1) облигации, по которым производится только выплата процентов, капитал не возвращается, точнее, эмитент указывает на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком. Такие облигации — свидетельства бессрочного займа. Например, в Англии — консоли, во Франции — французская рента;

2) облигации, по которым не выплачиваются проценты; это так называемые облигации с нулевым купоном (zero cupon);

3) облигации, по которым держателям не выплачиваются проценты до момента погашения облигации, например, в США — сберегательные облигации серии E (saving bonds series E);

4) облигации, дающие право их владельцам на получение периодически выплачиваемого фиксированного дохода и выкупной суммы в

будущем (в США — сберегательные облигации серии *H*). Этот вид облигаций, выпускаемых государственными финансовыми учреждениями и частными корпорациями, наиболее распространен в современной практике. Для последнего вида возможны выплаты процентов по переменной во времени норме. Иногда предусматривается поправка нормы доходности на инфляцию. Практика выпуска облигаций знает случаи, когда норма текущей доходности не была однозначно определена, а ставилась в зависимость от каких-либо внешних условий, например, от коньюктуры на денежно-кредитном рынке.

Облигации являются важным объектом финансовых инвестиций. С момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются по установившимся на рынке ценам. Рыночная цена в момент эмиссии может быть ниже номинала (discount bond), равна номиналу (at par) и выше номинала (premium bond).

Поскольку номиналы у разных облигаций существенно различаются между собой (например, в США номинальные цены облигаций государственных и коммерческих банков находятся в диапазоне от 25 до 100000 долл.), то часто возникает необходимость в сопоставимом измерителе рыночных цен облигаций. Таким показателем является курс. Под *курсом* (quote) понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала:

$$P_k=\frac{P}{N}100, \tag{9.1}$$

где P_k — курс облигации; P — рыночная цена; N — номинальная цена облигации.

Например, если облигация с номиналом 1000 руб. продается за 911 руб., то ее курс 91,1. За рубежом термин цена облигации часто означает ее курс. Рыночная цена и курс зависят от уровня доходности облигации, уровня ссудного процента в момент оценки и ряда других условий, важнейшим из которых является оценка надежности (степени риска) капиталовложений.

Общий доход от облигации и любой другой ценной бумаги с фиксированным текущим доходом складывается из трех элементов

- периодически выплачиваемого купонного дохода или начисления процентов,

- изменения стоимости ценной бумаги (приближение ее к выкупной цене) за соответствующий период времени; если облигация была куплена с дисконтом, то этот элемент — положительная величина (capital gains); если же она куплена с премией, то это отрицательная величина (capital losses); наконец, если облигация куплена по номиналу, то этот элемент отсутствует;

- доход от реинвестиции поступлений от купонов.

Последний элемент дохода, разумеется, несет в себе известную условность. Однако, его следует принимать во внимание, особенно в долгосрочных операциях, где эта составляющая общего дохода может сыграть заметную роль.

Доход от облигаций обычно ниже, чем от других видов ценных бумаг, однако он в меньшей мере зависит от конъюктурных и циклических колебаний, чем доход от акций. Например, его выплата может быть прекращена лишь при банкротстве корпорации, выпустившей облигацию. В связи с большей, чем у остальных видов ценных бумаг надежностью, в облигации инвестируются свободные средства пенсионных фондов, страховых компаний, взаимных фондов и т.д. Во многих странах в законодательном порядке предусматриваются обязательные вложения части активов соответствующих финансовых учреждений в государственные облигации.

Рейтинг облигаций. Облигации являются необходимым элементом в структуре портфелей финансовых инвестиций. Инвестиции в ценные бумаги сопряжены, как известно, с известным риском. Здесь можно выделить два основных вида риска — кредитный (credit risk) и рыночный (market risk). Под первым понимают возможность отказа в выплате процентов и основной суммы долга (в данном контексте — номинала облигации). Рыночный риск, который иногда называют процентным риском (interest rate risk), связан с колебаниями рыночной цены, определяемыми изменением общего уровня ссудного процента. Очевидно, что рыночный риск в значительной мере определяется сроком погашения облигации — чем больше этот срок, тем вероятнее значительные амплитуды колебаний рыночных процентных ставок. Ниже мы затронем проблему измерения срока облигаций.

Вернемся к кредитному риску. Очевидно, что он характеризует кредитоспособность эмитента. Поэтому государственные обязательства принято считать наиболее надежными, с наименьшим кредитным риском. Ценные бумаги коммерческих структур, естественно, рассматриваются как менее надежные — всегда остается некоторая вероятность банкротства.

Качество облигаций в отношении кредитного риска оценивается специальными агенствами (фирмами) путем отнесения облигации к определенной категории ценных бумаг по степени надежности выплаты процентов и выкупной цены. Такая операция называется *рейтинг* (raiting). Попутно отметим, что рейтинг применяется не только к ценным бумагам, но и к корпорациям. В США рейтинг национальных и иностранных облигаций осуществляется в основном двумя агенствами — «Стандард энд Пурс» и «Мудис» (Standard and

Poor's; Moody's). Указанные агенства относят облигации, выпускаемые корпорациями, к одной из девяти категорий: *AAA*, *AA*, *A*, *BBB*, *BB*, *B*, *CCC*, *CC*, *C* («Стандард энд Пурс») и *Aaa*, *Aa*, *A*, *Baa*, *Ba*, *B*, *Caa*, *Ca*, *C* («Мудис»).

Условия отнесения облигации к той или иной категории не отличаются большой четкостью. Наивысшей по качеству облигаций является категория *AAA*. К ней относятся облигации, характеризующиеся предельно высокой степенью надежности как в отношении их выкупа, так и выплаты процентов. Их оценка на рынке ценных бумаг определяется только уровнем ставки процента (метод оценки рассматривается в следующем параграфе). Качество облигаций, отнесенных к категории *AA*, лишь немного ниже облигаций *AAA*. Их рыночные цены также определяются движением ставки процента на денежном рынке. Категория *A* охватывает наилучшие облигации среднего качества. Их рыночная оценка во многом определяется ставкой процента на денежном рынке, однако она связана и с конъюктурными факторами.

Категория *BBB* является промежуточной между определенно надежными облигациями и облигациями, которые имеют в той или иной мере спекулятивный характер. Сюда относятся облигации среднего качества, которые имеют адекватное обеспечение и в нормальных условиях дают удовлетворительный доход. Они существенно восприимчивы к складывающейся экономической конъюктуре. Их рыночная стоимость в большей мере определяется особенностями соответствующего момента времени, чем ставкой процента, существующей на денежном рынке.

Облигации, относящиеся к категориям *BBB* и выше, обычно рассматриваются как практически безопасные. Многие финансовые учреждения в США (например, коммерческие банки) обычно вкладывают средства, предназначенные для закупки облигаций, только в эти облигации. Ряд учреждений (например, пенсионные фонды) может в соответствии с законодательством инвестировать средства только в облигации категории *A* и выше.

Категория *BB* охватывает наихудшие в инвестиционном отношении облигации среднего качества. Они характеризуются низкими показателям доходности. Проценты выплачиваются систематически, но возможны небольшие дефицитные периоды. К категории *B* относят спекулятивные облигации, выплата процентов по которым не обеспечена в плохих экономических условиях.

К категориям *CCC* и *CC* относят откровенно спекулятивные облигации. Проценты по ним выплачиваются, но при плохой экономической конъюктуре это сомнительно. К категории *C* принадлежат облигации, проценты по которым не выплачиваются.

Аналогичный рейтинг облигаций осуществляет агенство «Мудис».

В США рейтинг распространяется и на краткосроченые коммерческие векселя (commercial papers), выпускаемые в обращение крупными корпорациями. Коммерческие векселя делятся указанными выше агенствами на следующие категории: *A*1 — наилучший инвестиционный класс, *A*2 — высокий инвестиционный класс, *A*3 — средний инвестиционный класс, *B* — средний класс, *C* — спекулятивные, *D* — ожидается банкротство.

В Великобритании рейтингом облигаций занимается фирма «Экстел статистикал сервис» (Extel Statistical Service). Облигации, выпущенные в Великобритании, относятся этим агенством по степени надежности к одной из пяти категорий: от *A* до *E*. Эти же категории применяются и при оценивании надежности самих компаний и корпораций, выпустивших облигации.

Канадская служба рейтинга (Canadian Bond Rating Service) классифицирует облигации, выпущенные в Канаде, по восьми категориям: от *A++* до *D*.

9.2.Доходность облигаций

В практике весьма часто возникает задача определения фактической доходности инвестиций при известном курсе облигации или цене ее реализации. Иначе говоря, возникает задача определения финансовой эффективности займа. Подобного рода задача может возникнуть при выборе одного из различных условий предлагаемых займов, условий погашений кредита и т.д. Естественно, что кредитор, если право выбора принадлежит ему, будет рассматривать в качестве наиболее эффективного заем, приносящий ему наибольший доход. Позиция должника, разумеется, прямо противоположна — он, если есть возможность для выбора, будет выбирать заем или кредит с наименьшей выплатой денег за него, т.е. с наименьшей ставкой процентов. С аналогичной задачей сталкиваются и при пересмотре структуры портфеля облигаций. Итак, задача измерения эффективности займов (облигаций) сводится к определению их доходности. Доходность долгосрочных облигаций в большинстве случаев может быть охарактеризована несколькими параметрами. Доходность облигации с периодическими выплатами процентов можно измерить в виде купонной доходности (coupon rate), текущей доходности инвестиций в облигацию (current, running yield), наконец, полной доходностью (yield to maturity, redemption yield, yield).

Показатель текущей доходности является простейшей мерой, которая характеризует текущие поступления за год относительно сделанных инвестиций. Он не учитывает второй источник дохода — изменение цены облигации за срок ее хранения. Основываясь только на текущей доходности, нельзя правильно решить проблему выбора наиболее привлекательного для инвестора вида инвестиций. Достаточно сказать, что у облигаций с нулевым купоном и депозитных сертификатах текущая доходность равна нулю. В то же время это могут быть весьма доходными объектами инвестиций, если учитывать полный срок их «жизни». В отличие от текущей доходности показатель полной доходности учитывает оба источника дохода. Методы его расчета применительно к кредитным операциям обсуждались в главе 8. Рассмотрим теперь методику его определения в анализе облигаций. Показатель полной доходности применительно к облигациям и другим видам долгосрочных инвестиций уместно назвать *ставкой (нормой) помещения*. Итак, ставка помещения измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвестора с учетом видов дохода. Задачи измерения эффективности долгосрочного займа сводятся к определению ставки помещения в виде годовой ставки сложных процентов (редко — простых). Начисление процентов по этой ставке на цену приобретения облигации дает доход, эквивалентный фактически получаемому от нее доходу за весь период «жизни» облигации вплоть до момента погашения (выкупа). На рынке ценных бумаг ставка помещения не выступает непосредственно — это производная расчетная величина, которую можно определить лишь исходя из цены облигации, которую согласен уплатить инвестор, принимая во внимание купонную доходность облигации.

Рассмотрим методику определения показателей доходности для разных видов облигаций в той последовательности, в которой они перечисляются выше. Заметим, что в основе методики определения полной доходности любого вида облигации лежит концепция современной величины потока платежей, получаемых владельцем облигации.

До рассмотрения конкретных методов расчета введем одно уточнение в понятие «рыночная цена». Дело в том, что облигации реализуются по полной или, как иногда говорят, «грязной цене» (full, gross, dirty price). Последняя включает не только собственно рыночную цену облигации, но и ту сумму процентов, которую приносит облигация за период от последней выплаты процентов до момента продажи (accirued interest). Рыночная цена за вычетом величины процентов называется чистой ценой (clean, flat price). Во всех приведенных ниже расчетах фигурирует именно эта цена, если не оговорено иное.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов. Хотя подобного рода облигации встречаются крайне

редко, знакомство с ними необходимо для получения полной системы представлений о методике оценки ставки помещения. Доход от данного вида облигаций получают только в виде процентов, поскольку выплату номинала в необозримом будущем не следует принимать в расчет. Периодический доход равен gN (если проценты выплачиваются раз в году) или $\frac{gN}{p}$ (если они производятся p раз в году), где g — объявленная годовая норма доходности по облигации. Выплаты процентов в данной ситуации представляют собой вечную ренту (см.гл.4). Приравняем современную величину этой ренты ее совокупной цене, дисконтирование при этом осуществим по ставке помещения i:

$$P=\frac{gN}{i}\,.$$

Определим цену облигации через ее курс

$$P=\frac{P_k}{100}N. \tag{9.2}$$

После чего, если проценты выплачиваются ежегодно

$$i=\frac{g}{P_k}100; \tag{9.3}$$

если же проценты выплачиваются p раз в году, то

$$i=\left(\frac{g}{p}\cdot\frac{100}{P_k}+1\right)^p-1. \tag{9.4}$$

Пример 9.1. Вечная рента, приносящая 4,5% дохода, куплена по курсу 90. Какова действительная эффективность инвестиций, если проценты выплачиваются раз в году?

$$i=\frac{0{,}045}{90}100=0{,}05.$$

Пусть проценты выплачиваются поквартально, тогда $p = 4$ и

$$i=\left(\frac{0{,}045}{4}\cdot\frac{100}{90}+1\right)^4-1=0{,}0509.$$

#1

Несколько слов о текущей доходности данного вида облигации. Таковая находится как отношение годового дохода к сумме инвестиций, отсюда

$$i_m = \frac{gN}{P_k \frac{N}{100}} = \frac{g}{P_k} 100, \qquad (9.5)$$

т.е. текущая доходность равна ставке помещения (9.3). Это и понятно, так как для дохода имеется лишь один источник — выплата процентов.

Облигации без выплаты процентов. Данный вид облигаций обеспечивает один вид дохода для инвестора — разность между выкупной ценой облигации (обычно это номинал) и ценой приобретения. Приравняем дисконтированную величину номинала цене облигации, после чего нетрудно найти

$$i = \frac{1}{(P_k/100)^{1/n}} - 1, \qquad (9.6)$$

где P_k — курс, по которому куплена облигация для; данного вида облигаций $P_k < 100$; n — срок от момента приобретения до момента выкупа облигации.

Пример 9.2. Корпорация «Пепсико Капитал Корпорейшн» выпустила облигации без выплаты процентов (выпуск в 1981 г., погашение в 1984 г.) на сумму 75 млн. долл. Курс, по которому реализовывалась облигация, был равен 67,5. Доходность такой облигации (ставка помещения) составит

$$i = \frac{1}{0{,}675^{1/3}} - 1 = 0{,}14, \text{ т.е. } 14\%.$$

#2

Облигации с выплатой процентов в конце срока. Курс данного вида облигаций может отклоняться в любую сторону от 100. Проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы (lump sum). Доход в этом случае имеет два источника — проценты за весь период займа и прирост капитала (разность номинала и покупной цены). При определении искомой величины i исходим из следующих соображений. В конце срока владелец облигации получит номинал с процентами, поэтому дисконтируем эту величину и приравняем ее цене приобретения

$$P = \frac{P_k N}{100} = N(1+g)^n v^n,$$

где $v^n = (1+i)^{-n}$ — дисконтный множитель по ставке i. Решив равенство, находим

$$i = \frac{1+g}{(P_k/100)^{1/n}} - 1. \qquad (9.7)$$

Если курс облигации меньше 100, то $i > g$ и, наоборот, при $P_k > 100$ (облигация приобретается с премией) $i < g$.

Пример 9.3. Облигация реализована по курсу 95, срок 8 лет. Предусматривается начисление процентов по ставке 5%. Ставка помещения при условии, что проценты и номинал погашаются в конце срока, составит

$$i = \frac{1{,}05}{(95/100)^{1/8}} - 1 = 0{,}05675.$$

Допустим теперь, что облигация куплена по курсу 105, тогда i = 0,04362.

#3

Облигации с периодической выплатой процентов, погашаемые в конце срока. Нетрудно убедиться, что все рассмотренные выше облигации являются частными случаями данного вида облигаций, который получил наибольшее распространение в практике. Суммарный доход от облигаций данного вида займа складывается из двух элементов — текущего дохода (реализуемого с помощью купонов — купонный доход) и дохода, получаемого в конце срока облигации. Именно для такой облигации можно получить все три показателя доходности, о которых упоминалось выше. На купонной доходности не будем останавливаться — ее уровень очевиден. Что касается текущей доходности, то ее легко определить как

$$i_m = \frac{Ng}{P} = \frac{g}{P_k} 100, \qquad (9.8)$$

где g — норма доходности по купонам; N — номинальная цена облигации; P — рыночная ее цена; P_k — курс в момент приобретения.

Если выплата по купонам производится p раз в году (чаще всего два раза), каждый раз по норме g/p, то формула (9.8) дает несколько приуменьшенный результат, так как она не учитывает возможность реинвестирования полученных в виде процентов средств. Однако в практике расчет ведется по формуле (9.8).

Как уже отмечалось, норма текущей доходности представляет собой показатель, который фактически не дает представления о реальной доходности, это лишь первое приближение к ней, так как при расчете этого показателя не учитывается разность между покупной ценой облигации и номиналом, которая может существенно повысить эффективность приобретения облигации или снизить ее. Ставка помещения учитывает все виды дохода от облигации. В основу ее определения положено равенство суммы дисконтированных поступлений от облигации цене приобретения. Для облигации с периодической выплатой процентов (раз в конце года) и погашением ее номинала в конце срока при условии, что покупка облигации производится в момент ее выпуска, получим

$$P=N(1+i)^{-n}+Nga_{n;i}, \qquad (9.10)$$

откуда

$$P_k=((1+i)^{-n}+ga_{n;i})100. \qquad (9.11)$$

Соответственно, если облигация предусматривает выплату процентов по полугодиям или поквартально,

$$P_k=(\,(1+i)^{-n}+ga^{(2)}_{n;i})\,100. \qquad (9.12)$$

$$P_k=(\,(1+i)^{-n}+ga^{(4)}_{n;i})\,100. \qquad (9.13)$$

Значение i находим по формулам (9.10)-(9.13) каким-либо приближенным способом, например путем интерполяции.

Формула линейной интерполяции для данного случая

$$i=i'+\frac{P'_k-P_k}{P'_k-P''_k}(i''-i'). \qquad (9.14)$$

Для определения i задают некоторые значения i' и i'', ограничивающие интервал, в пределах которого, как ожидается, находится действительное значение ставки i. Значения i' и i'' выбираются с учетом того, что $i>g$, если $P_k<100$. На основе этих ставок по формулам (9.11)-(9.13) вычисляются соответствующие значения P' и P''. Затем по формуле (9.14) находят искомое значение i. Значение i, полученное интерполяцией, всегда больше точного.

Интерполяционная формула (9.14) справедлива и для случая, когда облигация продается не с дисконтом, а с премией. Здесь, однако, значения i' и i'' выбираются с учетом того, что $i<g$.

Пример 9.4. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 8%, куплена по курсу 97. Необходимо определить доходность облигации.

Найдем два показателя доходности:

1) текущая доходность i_m = 8/97 = 0,08247;

2) полную доходность определим с помощью интерполяции.

Поскольку $P_k<100$ следовательно, $0{,}0825<i$. Для интерполяции примем следующие ставки $i'=0{,}085$ и $i''=0{,}095$. Откуда согласно (9.11)

$$P'_k=(1{,}085^{-5}+0{,}08a_{5;8,5})100=98{,}03 \text{ и}$$

$$P''_k=(1{,}095^{-5}+0{,}08a_{5;9,5})100=94{,}24.$$

Тогда

$$i=8{,}5+\frac{98{,}03-97}{98{,}03-98{,}24}(9{,}5-8{,}5)=8{,}77.$$

В целях проверки найдем расчетный курс облигации при условии, что ставка помещения равна 8,77%, получим

$$P_k=(1{,}0877^{-5}+0{,}08a_{5;8,77})100=96{,}99.$$

Как видим, результат близок к курсу, по которому продана облигация.

Допустим теперь, что облигация куплена по курсу 95 и проценты по ней выплачиваются два раза в году, тогда, применяя ту же методику, получим i = 9,49%.

#4

Точное значение искомого показателя, вернее, его значение с заданной степенью точности, получают на основе какой-либо итерационной процедуры, в том числе с помощью метода Ньютона- Рафсона. В некоторых практических руководствах по финансовым расчетам, для быстрой оценки рекомендуют упрощенные методы, согласно которым искомую оценку можно получить, соотнеся годовой доход от облигации со средней ее ценой. Последняя определяется на основе номинала и цены приобретения облигации. Таким образом, для облигации, приобретенной с дисконтом, имеем

$$i \approx \frac{gN+(N-P)/n}{(P+N)/2}$$

и для облигации, купленной с премией,

$$i \approx \frac{gN-(P-N)/n}{(P+N)/2};$$

где n — число лет, оставшееся до погашения, g — годовой купонный доход.

Необходимо заметить, что результат, получаемый по этим формулам, может заметно отличаться от точного.

Пример 9.5. Для данных примера 9.4. находим

$$i = \frac{8+(100-97)/5}{(100+97)/2} = 8{,}73,$$

точное значение этого параметра 8,77.

#5

В практике редко, но все же встречаются случаи, когда выкупная цена отличается от номинала. В этом случае проценты начисляются на сумму номинала, а прирост капитала равен разности $C-P$, где C — выкупная цена. Соответственно, при определении ставки помещения необходимо внести корректив в формулу (9.10), после чего

$$P = C(1+i)^{-n} + Nga_{n;i}. \qquad (9.15)$$

Пример 9.6. Необходимо выбрать, ориентируясь на ставку помещения, один из двух видов облигаций с разными условиями — см. табл. 9.1.

Таблица 9.1

Облигация	Выкупная цена	Продолжительность займа, лет	Норма доходности, %	Курс
1	100	5	8	97
2	110	6	12	120

Условия выпуска облигации 1 взяты из предыдущего примера. Норма текущей доходности и ставка помещения для такой облигации равны 8 и 8,77%. Найдем соответствующие оценки для второй облигации.

Норма текущей доходности составит $(12:120)100 = 10\%$. Что касается ставки помещения, то для ее расчета напишем равенство

$$120 = 110(1+i)^{-6} + 12a_{6;i}.$$

Для оценки i применим интерполяционную формулу. Пусть $i' = 8{,}5\%$, $i'' = 10\%$. Тогда $P'_k = 122{,}21$, $P''_k = 114{,}35$ и

$$i = 8{,}5 + \frac{122{,}21-120}{122{,}21-114{,}25}(10-8{,}5) = 9{,}92\%.$$

Как видим, преимущество второй облигации не столь уж разительно, если сравнение базируется на ставках помещения.

#6

Выше, в расчетах по определению ставки помещения, предполагалось, что облигация покупается в момент ее выпуска. Это важный частный случай. Однако часто облигации покупаются спустя некоторое время после их выпуска. Если приобретение облигации происходит в момент выплаты процентов, то все приведенные выше методы расчетов сохраняют свою силу, однако под n понимается срок, оставшийся до выкупа облигации. Для случая, когда облигация покупается в момент между двумя выплатами по купонам, приведенные формулы дадут несколько смещенные оценки.

Доходность облигации в виде простой процентной ставки. Как альтернативу годовой сложной процентной ставке в качестве показателя реальной доходности иногда применяют простую ставку помещения:

$$i_{эп} = \frac{g+(100-P_k)/n}{P_k}100,$$

где g — текущий доход облигации в процентах.

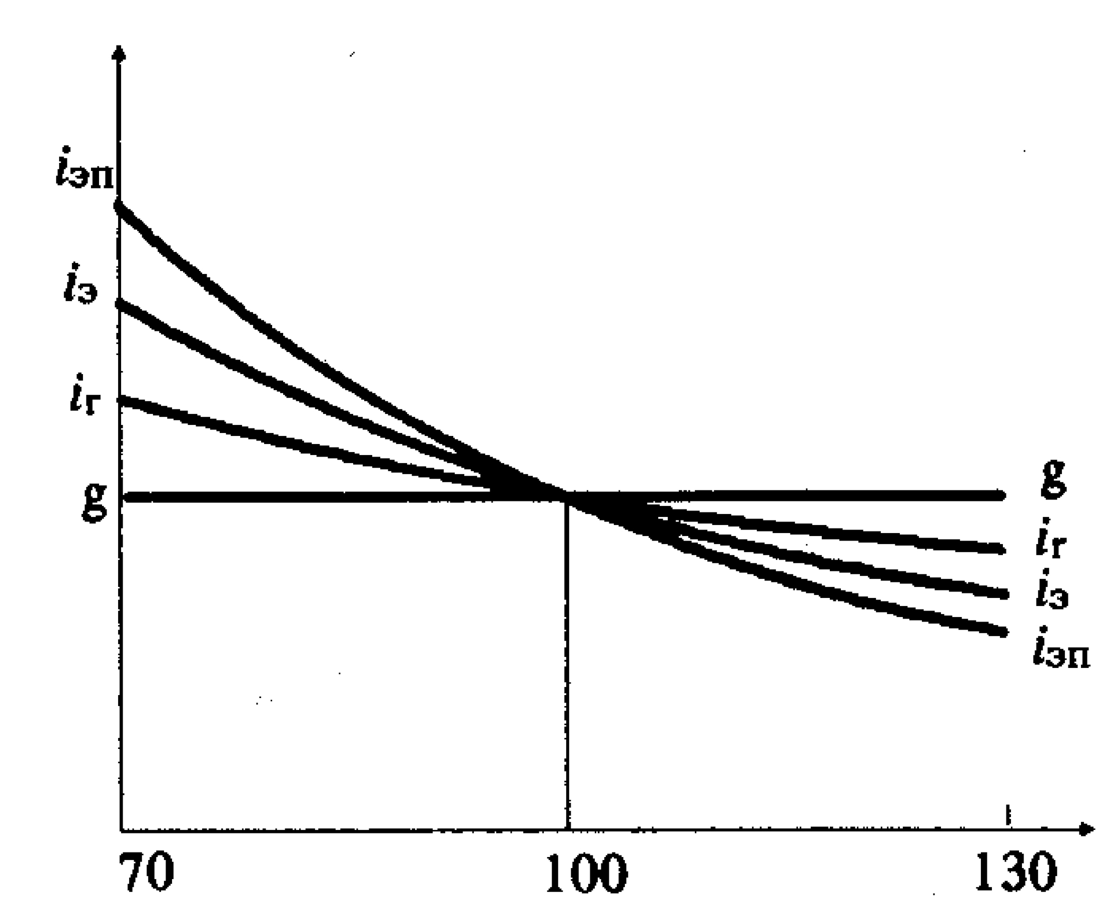

Рис. 9.1

Между текущей доходностью и ставками помещения в виде сложных и простых процентов существуют следующие соотношения: если облигация приобретена с премией (курс более 100), то $i_m > i > i_{эп}$; если облигация приобретена с дисконтом (курс меньше 100), то $i_m < i < i_{эп}$.

Динамика трех видов показателей доходности облигаций в зависимости от курса, показана на рис.9.1. Нетрудно убедиться в том, что если облигация куплена по номиналу, то все показатели доходности совпадают по своей величине и равны g.

Пример 9.7. Доходность облигации примера 9.4 в виде простой ставки составит

$$i_{эп}=\frac{8+(100-97)/5}{97}100=8{,}86\%.$$

Таким образом, текущая доходность облигации равна 8%, ставка помещения — 8,77% (сложные проценты) и 8,86% (простые проценты).

#7

Таблицы доходности облигаций. Для быстрой ориентации инвесторов в отношении эффективности облигаций с различными рыночными курсами и процентными платежами разрабатываются специальные таблицы, которые публикуются в так называемых «книгах доходности» (Yield book). В таблицах приводятся значения $i_э$ для большого диапазона величин n, g и P_k. Таблицы публикуются в двух видах. В одном варианте по заданным курсу, сроку до погашения и купонной ставке находят ставку помещения, в другом — по заданным ставке помещения и другим параметрам облигации определяют необходимый курс. Ниже в качестве иллюстрации приводятся таблицы для двух уровней купонной ставки (g = 5 и 10%), при условии, что проценты выплачиваются раз в году.

Таблица 9.2

Доходность облигаций (5%)

Курс	Ставка помещения, %, при сроке займа, лет					Текущая доходность, %
	5	6	8	10	12	
85	8,84	8,27	7,57	7,15	6,88	5,88
90	7,47	7,10	6,65	6,38	6,21	5,55
95	6,19	6,02	5,80	5,67	5,28	5,26
98	5,47	5,40	5,31	5,26	5,23	5,10
99	5,23	5.20	5,16	5,13	5,11	5,05
100	5	5	5	5	5	5
101	4,77	4,80	4,85	4,87	4,89	4,95
102	4,54	4,61	4,69	4,74	4,78	4,90
105	3,88	4,04	4,25	4,37	4,45	4,76

Таблица 9.3

Доходность облигаций (10%)

Курс	Ставка помещения, %, при сроке займа, лет					Текущая доходность, %
	5	6	8	10	12	
85	14,30	13,75	13,08	13,69	12,44	11,76
90	12,77	12,41	12,16	11,72	11,56	11,11
95	11,34	11,17	10,95	10,83	10,75	10,53
98	10,52	10,46	10,37	10,33	10,29	10,20
99	10,26	10,23	10,19	10,16	10,15	10,10
100	10	10	10	10	10	10
101	9,74	9,78	9,86	9,88	9,89	9,99
102	9,49	9,55	9,65	9,68	9,71	9,80
105	8,62	8,91	9,11	9,22	9,30	9,52

Стоимость займа для должника. Выше доходность долгосрочных займов оценивалась с позиций инвестора. Для заемщика операция привлечения средств посредством займа (например, путем выпуска и продажи облигаций) оценивается с диаметрально противоположной позиции — он должен знать, какова цена привлечения средств. Если при организации займа заемщик не несет никаких расходов (выплата сборов, налогов, комиссионных), то искомая цена равна ставке помещения. Однако такие расходы практически неизбежны. Они несколько сокращают сумму, получаемую при реализации займа. Цена займа в виде годовой сложной процентной ставки в этом случае может быть найдена по приведенным выше формулам ставки помещения, в которых из курса облигации вычитается относительная стоимость расходов (в расчете на 100 денежных единиц номинала).

Пример 9.8. В примере 9.4 ставка помещения при выплате процентов один раз в году равна 8,77%. Найдем цену кредита для должника при условии, что его расходы в связи с организацией займа составили 1% к номиналу. В этом случае вместо P_k = 97 в расчетах используем P_k = 96.

В итоге имеем:

$$i=8{,}5+\frac{98{,}03-96}{98{,}03-94{,}24}(9{,}5-8{,}5)=9{,}03\%.$$

Таким образом, заем должнику обходится по цене 9,03%, а без дополнительных расходов его цена 8,77%.

#8

Доходность с учетом налогов. До сих пор мы не принимали во внимание налоги на доход, который приносят облигации. Отсутствие развитого пакета законов о налогообложении доходов от ценных бумаг не позволяет опираться при обсуждении этой проблемы на отечественный опыт. Во многих странах ставки доходов на налог дифференцированы по видам ценных бумаг. Наименьший налог - на доходы от государственных и муниципальных бумаг, на доходы от бумаг коммерческих организаций выше. Обычно ставки налогов различаются по источнику дохода. Подоходным налогом облагается обычно только купонный доход. Налог на прирост капитала (capital gains) часто устанавливается по другой ставке. Уровень налоговых ставок во многих странах зависит и от категории инвестора. Например, пенсионные фонды, которые представляют собой крупнейших инвесторов в ценные бумаги, как правило освобождаются от уплаты налогов.

Полную доходность с учетом выплаты налогов (net yield) определяют такими же методами, что и без учета этого фактора. Разница заключается лишь в том, что поток платежей, на основе которого рассчитывают ставку помещения, состоит из показателей чистого дохода. В связи с этим вернемся к формуле (9.10) и скорректируем ее, введя две налоговые ставки:

$$P=(N-m(N-P))v^n+(1-l)Nga_{n;y}, \tag{9.17}$$

где m — ставка налога на прирост капитала; l — ставка дохода на текущий доход; $v=(1+y)^{-n}$ — дисконтный множитель по ставке y; y — ставка помещения с учетом налога. Разделим (9.17) на N и произведем ряд преобразований, после чего получим

$$P_k=\frac{100}{1-mv^n}((1-m)v^n+(1-l)ga_{n;y}). \tag{9.18}$$

Допустим теперь, что налог на прирост капитала не взимается, тогда вместо (9.10) и (9.11) имеем

$$P=N(1+y)^{-n}+(1-l)Nga_{n;y}; \tag{9.19}$$

$$P_k=((1+y)^{-n}+(1-l)ga_{n;y})100. \tag{9.20}$$

Пример 9.9. Вернемся опять к примеру 9.4 и рассчитаем ставку помещения при условии, что на купонный доход накладывается налог по ставке 20%, а на прирост капитала — 28%. Нетто- ставку помещения найдем, решив каким-либо методом следующее равенство

$$97=\frac{100}{1-0{,}28(1+y)^{-5}}(0{,}72(1+y)^{-5}+0{,}8\cdot0{,}08a_{5;y})$$

относительно y. Получим y = 6,985%. Чистая норма текущей доходности в этом случае, очевидно, составит 0,8·0,08 = 0,064 или 6,4%.

Допустим теперь, что налог на прирост капитала не взимается, тогда исходя из равенства (9.20) получим y = 7,974%.

Для того, чтобы механизм влияния налогов на доходность был более ясен, представим поступления от облигации в виде потока платежей с учетом налогов (см. таблицу 9.4).

Таблица 9.4.

Потоки платежей по облигации (g = 8%, P_k = 97)

Год	Доход	Налоги	Чистый доход	Дисконтированный доход
1	8	1,6	6,4	5,981
2	8	1,6	6,4	5,592
3	8	1,6	6,4	5,226
4	8	1,6	6,4	4,885
5	108	2,44	105,56	75,316
				97

В первых четырех годах уплачивается только налог на текущий доход. В пятом году выплачивается этот налог и налог на прирост капитала, который равен (100 - 97) 0,28 = 0,84. В целом сумма налога в этом году равна 1,6 + 0,84 = 2,44. Дисконтирование чистого дохода производится по ставке помещения. Сумма дисконтированных показателей чистого дохода равна 97, т.е. курсу, по которому приобретена облигация.

#9

В практике чистую доходность иногда определяют приближенным методом по ставке помещения, не учитывающей налоги.

$$y=g(1-l)+(i-g)(1-m). \tag{9.21}$$

Эта оценка дает приемлемые результаты. Она складывается из двух элементов — текущего дохода, скорректированного по налоговой ставке и «остатка» от ставки помещения, скорректированного по своей налоговой ставке.

Пример 9.10. Найдем приближенным способом ставку помещения для облигации из примера 9.9 с учетом налога.

$$y=8(1-0,2)+(8,77-8)(1-0,28)=6,954\%.$$

Напомним, что точное значение равно 6,985%. Ошибка, как видим, проявилась только во втором знаке.

#10

Все приведенные выше расчеты предполагали, что уплата налогов по времени совпадает с получением доходов от облигации. Это, разумеется, крайний случай. Временной лаг для налоговых платежей, как и любая другая отсрочка платежей, увеличивает доходность.

9.3. Дополнительные характеристики облигаций

Основным параметром, принимаемым во внимание при инвестировании средств в облигации, является доходность. Однако показателя доходности недостаточно для обоснованного выбора вида облигации. Необходимо знать и как долго владелец облигации будет иметь финансовую отдачу от нее, поскольку чем больше срок, тем выше риск. Однако срок облигации, точнее период от ее покупки до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций, так называемый «профиль доходов». Ясно, что риск, связанный с облигацией с нулевым купоном и облигацией с большими выплатами по купонам, будет различным даже при одинаковом общем сроке. Для характеристики облигаций (как и других видов долгосрочных ценных бумаг с фиксированным доходом) в этом отношении рассчитывают различные показатели.

Средний срок. Этот показатель (average life) обобщает сроки выплат всех видов по облигации в виде взвешенной средней арифметической величины. В качестве весов здесь берутся размеры платежей. Иначе говоря, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на среднюю оказывает его срок. Если купоны оплачиваются ежегодно, то

$$T=\frac{\sum t_j S_j}{\sum S_j}=\frac{Ng\sum_{1}^{n} t_j+nN}{nNg+N}, \tag{9.22}$$

где $t_j=1,...,n$ — сроки платежей по купонам в годах, S_j — сумма платежа, T — средний срок облигации.

Расчет T можно осуществить по формуле (9.22), выписав ряды платежей и их сроки. Однако можно расчитывать искомый параметр

без этого, поскольку $\sum_{1}^{n} t=\frac{n(n+1)}{2}$, то получим

$$T=n\frac{g(n+1)/2+1}{gn+1}. \tag{9.23}$$

Средний срок T всегда меньше n (если $g>0$). Если же $g=0$ (облигации с «нулевыми купонами»), то $T=n$. Чем больше текущий доход от облигации относительно N, тем меньше T и, следовательно, меньше риск, связанный с инвестицией в данный вид облигации.

Формула (9.22) предполагает, что выкуп производится по номиналу. В случае, когда облигация погашается по выкупной цене C, отличающейся от номинала, имеем

$$T=\frac{Ng\sum t_j+nC}{nNg+C}, \quad t=1, \ldots, n.$$

Если купоны выплачиваются по полугодиям, то вместо (9.22) получим

$$T=\frac{\frac{Ng}{2}\sum t_j+nN}{nNg+N}, \quad t_j=0,5,1, \ldots, n. \tag{9.24}$$

Напомним, что n — общий срок облигации. Поскольку в этом случае $\sum_{0,5}^{n} t_j=(0,5+n)n$, то средний срок облигации при условии, что купоны выплачиваются по полугодиям, находится как

$$T=n\frac{(0,5+n)\frac{g}{2}+1}{gn+1}. \tag{9.25}$$

Пример 9.11. Определим средний срок для облигации в примере 9.9. Расчет $\sum tS_j$ приведен в следующей таблице.

%	S_j	tS_j
1	8	8
2	8	16
3	8	24
4	8	32
5	108	540
Итого	140	620

$T = 620 : 140 = 4{,}43$ года.

Расчет по формуле (9.23) дает, разумеется, тот же результат.

$$T=5\frac{(5+1)\frac{0{,}08}{2}+1}{0{,}08\cdot 5+1}=4{,}43 \text{ года.}$$

Если проценты выплачиваются два раза в году, то, применив (9.25), получим

$$T=5\frac{(0{,}5+5)\frac{0{,}08}{2}+1}{0{,}08\cdot 5+1}=4{,}36 \text{ года.}$$

Как видим, изменение порядка оплаты процентов несколько снизило средний срок облигации.

#11

Средняя продолжительность платежей. В последнее время в практику инвесторов в ценные бумаги прочно вошел специальный показатель, получивший название «изменчивость» (volatility) или «продолжительность» (duration). Первое из приведенных названий, вероятно, связано с изменчивостью цены облигации при изменении рыночной процентной ставки. Второе — с тем, что он представляет собой средний срок платежей по облигации. Отличие этого показателя от среднего срока облигации T заключается в системе взвешивания. В качестве весов здесь принимаются не суммы платежей, а их дисконтированные величины. Назовем его *средняя продолжительность платежей* и обозначим символом D.

Пусть проценты выплачиваются ежегодно, тогда по определению

$$D=\frac{\sum tS_j v^t}{\sum S_j v^t}=\frac{Ng\sum tv^t+nNv^n}{P},$$

где v — дисконтный множитель по рыночной ставке.

Разделим числитель и знаменатель приведенного выражения на N, в итоге

$$D=\frac{g\sum tv^t+nv^n}{P_k:100};\quad t=1,\ .\ .\ .\ ,\ n. \qquad (9.26)$$

Можно доказать, что фигурирующая в (9.26) сумма $\sum tv$ рассчитывается следующим образом

$$\sum_1^n tv^t=\frac{v}{v-1}\left(nv-\frac{v^n-1}{v-1}\right)=\frac{1}{i}\left(a_{n;i}(1+i)-nv^n\right). \qquad (9.27)$$

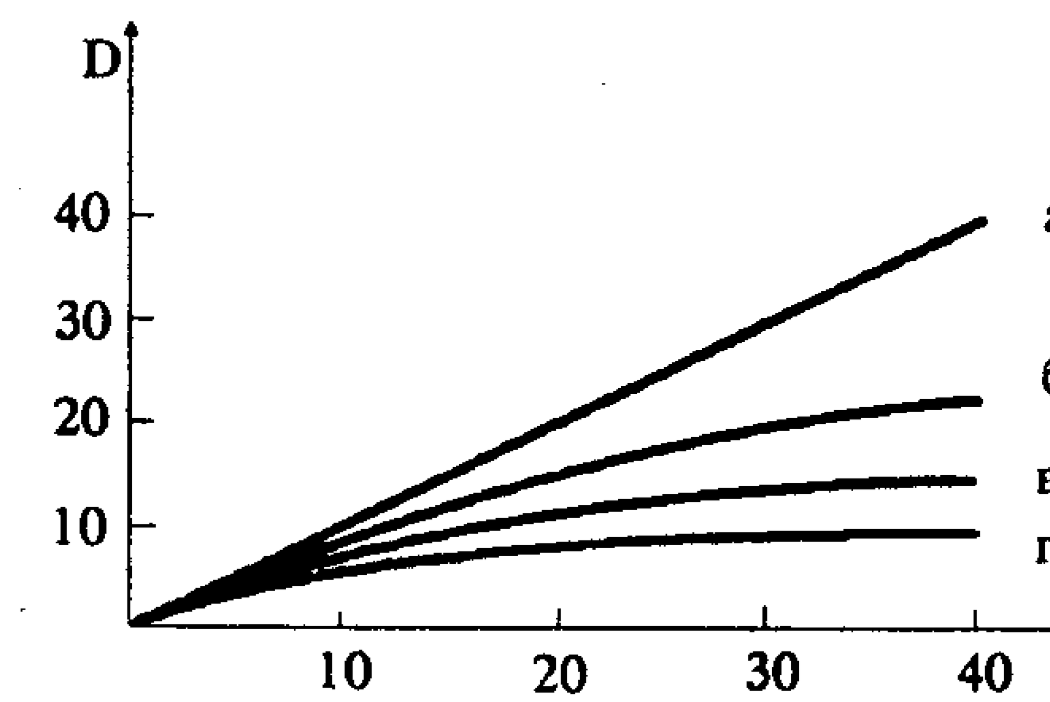

Рис. 9.2

Применение этой формулы позволяет обойтись без подсчета ряда дисконтных множителей и дисконтирования каждого платежа в отдельности.

Для случаев, когда $g>0$, всегда имеет место неравенство $D<T$, причем чем больше срок облигации, тем в большей мере средняя продолжительность поступлений отличается от срока облигации. Изменение средней продолжительности платежей в зависимости от срока облигации иллюстрируется на рис. 9.2.

Пример 9.12. Определим средней продолжительности поступлений для облигации в примере 9.3. Напомним, что процентная ставка здесь равна 8,77%. Найдем показатель D с помощью взвешивания по суммам дисконтированных платежей. Для этого рассчитаем v^t, S_jv^t, tS_jv^t.

t	v^t	S_j	S_jv^t	tS_jv^t
1	0,9194	8	7,3550	7,3550
2	0,8452	8	6,7619	13,5238
3	0,7771	8	6,2167	18,6502
4	0,7144	8	5,7155	2,8620
5	0,6568	108	70,9379	354,6889
Итого			96,987	417,0809

Таким образом, $D=417{,}08/96{,}99=4{,}3$ года.

Для расчета по формуле (9.27) находим: $a_{5;8,77}=3{,}91297$ и

$$\sum tv^t=\frac{1}{0{,}0877}(3{,}91297\cdot 1{,}0877-5\cdot 1{,}0877^{-5})=11{,}08298.$$

$$D=\frac{0{,}08\cdot 11{,}08298+5\cdot 1{,}0877^{-5}}{0{,}97}=4{,}3.$$

#12

Если купонные платежи производятся по полугодиям, то и в этом случае можно воспользоваться формулой (9.26), в которой t будет означать номер полугодия, а v — дисконтный множитель по уменьшенной вдвое ставке. Полученное расчетное значение D покажет среднюю продолжительность платежей в полугодиях.

Из определения показателя D и приведенных формул следует, что этот показатель в большей мере учитывает специфику распределения платежей по времени — с ростом уровня ссудного процента более отдаленные платежи имеют все меньший вес, соответственно падает величина D, в то время как величина среднего срока инвариантна изменению рыночной ставки. Однако вряд ли средняя продолжительность поступлений привлекала бы столь большое внимание финансовых аналитиков, будь он только измерителем срока платежей. Главное его назначение — *мера изменения цены облигации при незначительной динамике уровня процентной ставки на денежном рынке.* Для решения этой проблемы, строго говоря, используется не величина D, а ее модификация:

$$MD=\frac{D}{1+i/p}, \qquad (9.28)$$

где D — средняя продолжительность поступлений; i — рыночная процентная ставка; p — число выплат процентов в году. Присвоим показателю MD название *модифицированная изменчивость* (за рубежом его обычно называют modified duration).

Можно показать, что MD представляет собой показатель эластичности цены по процентной ставке. Пусть ставка на рынке изменится на величину Δi. Соответствующее изменение цены составит

$$\Delta P=-0{,}01 MD \Delta i P. \qquad (9.29)$$

Пример 9.13. Ставка помещения облигации в примере 9.4 равна 8.77%. Показатель изменчивости равен 4.3, откуда

$$MD=\frac{4{,}3}{1+0{,}0877}=3{,}95.$$

К какому изменению цены приведет рост рыночной процентной ставки с 8,77 до 8,9% ? По формуле (9.29) находим

$$\Delta P=-0{,}01\cdot 3{,}95\cdot 0{,}13\cdot 97=-0{,}5,$$

т.е. ожидаемое значение цены 97 - 0,5 = 96,5.

#13

«Выпуклость». Две облигации с одинаковой полной доходностью и показателем средней продолжительности поступлений (реакцией

цены на небольшие изменения процентной ставки) могут различаться по отзывчивости цены на большие изменения ставки. Измерение облигации в этом отношении осуществляется с помощью показателя, который получил несколько странное для экономиста название — *выпуклость* (convexity). Этот показатель весьма сложен как по содержанию (он представляет собой усложненный вариант показателя эластичности цены облигации по процентной ставке), так и в отношении его расчета. К тому же, вероятно, еще нельзя говорить о его широком практическом применении. Поэтому ограничимся следующими сведениями.

Расчет производится по формуле

$$C_x=\frac{1}{1+i/p}\left(M^2+D^2+\frac{D}{p}\right); \qquad (9.30)$$

где M^2 — дисперсия показателей времени платежа. Остальные символы имеют то же содержание, что и выше. Необходимую величину дисперсии находим следующим образом.

$$M^2=\frac{1}{P}\sum t^2 S_j v^t-D^2 . \qquad (9.31)$$

Как уже говорилось выше, показатель C_x позволяет определить сдвиги в цене облигаций в зависимости от крупных сдвигов в процентной ставке.

$$\Delta P=-P\cdot MD\cdot\frac{\Delta i}{100}+\frac{0{,}5\cdot P\cdot C_x\cdot\Delta i^2}{10000}. \qquad (9.32)$$

Пример 9.14. Для облигации примера 9.4 были получены следующие характеристики: i = 8,77%, D = 4,3, MD = 3,95.

Рассчитаем величину дисперсии показателя времени, предварительно определив

$$\sum t^2 S_j v^t=1949{,}69 \quad \text{и} \quad M^2=1949{,}69/97-4{,}3^2=1{,}6.$$

Теперь можно рассчитать C_x:

$$C_x=\frac{1}{1+0{,}0877}(1{,}6+4{,}3^2+4{,}3)=22{,}42.$$

Предположим, что ожидается рост рыночной процентной ставки до 11%. Как изменится в этом случае цена облигации?

$$\Delta P=-97\cdot 3{,}95\frac{2{,}23}{100}+0{,}5\cdot 97\cdot 22{,}42\frac{2{,}23^2}{10000}=-8.$$

Таким образом, рост ставки на 2,23% приведет к снижению рыночной цены с 97 до 89.

#14

9.4. Портфель облигаций

Портфель (набор), охватывающий различные по видам и срокам облигации, также является объектом количественного финансового анализа. Простейший анализ заключается в оценке полной доходности портфеля и среднего показателя изменчивости. Более сложный — в определении оптимальной структуры портфеля, в разработке и проведении такой стратегии при формировании структуры портфеля, которая обеспечивала гарантированный поток платежей (immunization). Последние из названных направлений анализа требуют самостоятельного рассмотрения, которое не вписывается в рамки настоящей книги.

Доходность портфеля измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка находится с помощью ряда методов. Наиболее точным является решение уравнения, в котором общая стоимость облигаций приравнивается сумме современных величин всех видов платажей.

$$\sum S_t v^t - \sum Q_j P_j = 0.$$

Величина $\sum Q_j P_j$ характеризует размер портфеля по цене приобретения, $\sum S_t v^t$ — сумму современных величин всех поступлений от облигаций, определенных по искомой ставке i. Здесь S_t — член потока платежей в момент t; Q_j — количество облигаций вида j; P_j — цена приобретения облигации; v — дисконтный множитель по ставке i. Значение i находят с помощью интерполяции или каким-либо итерационным методом.

Приближенные методы заключаются в расчете средних взвешенных ставок помещения. Веса определяются двумя способами. Согласно первому в качестве весов берутся стоимости облигаций, по ценам приобретения, тогда

$$I=\sum i_j Q_j P_j / \sum Q_j P_j. \qquad (9.32)$$

Считается, что меньшую погрешность дает взвешивание, когда в качестве весов принимаются произведения показателей изменчивости на стоимости приобретения облигаций, тогда

$$I = \sum i_j D_j Q_j P_j / \sum D_j Q_j P_j. \qquad (9.33)$$

Пример 9.15. Портфель, приобретенный за 355 тыс. руб., содержит облигации со следующими параметрами:

Облигация	Количество, Q_j	Цена, P_j	Номинал, N_j	Срок, n_j	Купонный доход, g_j	Число выплат в году, p_j
А	1000	95	100	5	8%	1
Б	500	120	200	8	-	-
В	2000	100	100	4	9%	2

На основе приведенных данных сформируем поток платежей (табл. 9.5, гр.2). Для этого найдем размер платежа в конце каждого полугодия. Время в годах здесь: 0,5; 1; 1,5 и т.д. Размер платежа в первом полугодии равен только процентам от облигаций типа *В*, в конце первого года — сумме процентов по облигациям типа *А* и *В*, в конце четвертого года — сумме процентов и стоимости погашения номинала облигаций типа *В*.

Таблица 9.5.

t	Размер члена потока R_t	v_8^t	v_9^t	$R_t v_8^t$	$R_t v_9^t$
1	2	3	4	5	6
0,5	9000	0,9622	0,9578	8660	8622
1,0	17000	0,9259	0,9174	15741	15596
1,5	9000	0,8910	0,8787	8019	7909
2,0	17000	0,8573	0,8417	14575	7575
2,5	9000	0,8250	0,8062	7425	7256
3,0	17000	0,7938	0,7722	13495	13127
3,5	9000	0,7638	0,7396	6875	6656
4,0	217000	0,7350	0,7084	159501	153728
5,0	108000	0,6806	0,6499	73503	70192
8,0	100000	0,5403	0,5019	54027	50187
Итого				361820	346860

Поскольку ожидаемое значение средней ставки помещения находится между 8 и 9%, рассчитаем соответствующие дисконтные множители — гр.3 и 4. В гр.5 и 6 приводятся дисконтированные величины членов потоков платежей.

По интерполяционной формуле (9.14), в которой вместо P_k применим сумму цен, находим

$$I=8+\frac{361820-355000}{361820-347680}(9-8)=8{,}48\%.$$

Проверка: сумма дисконтированных по этой ставке платежей составит 344850 руб. Дальнейшее уточнение оценки дает $i=8{,}47\%$, при этом контрольная сумма равна 355000.

#15

Пример 9.16. Найдем приближенные показатели доходности портфеля облигаций примера 9.15. Доходности облигаций в виде годовой ставки сложных процентов равны соответственно 9,3; 6,59 и 9%.

Применив приближенную формулу (9.32), получим

$$I=\frac{9{,}3\cdot 9{,}5+6{,}59\cdot 6+9\cdot 20}{35{,}5}=8{,}67\%.$$

Ответ заметно отличается от точного (8,47%). Для того, чтобы применить формулу (9.33), необходимо найти показатели изменчивости для каждого вида облигаций. Определим их по формуле (9.26): 4,2; 8 и 3,47 года. В этом случае для портфеля облигаций получим

$$I=\frac{9{,}3\cdot 4{,}2\cdot 9{,}5+6{,}59\cdot 8\cdot 6+9\cdot 3{,}47\cdot 20}{4{,}2\cdot 9{,}5+8\cdot 6+3{,}47\cdot 20}=8{,}34\%.$$

Погрешность в ответе несколько меньше, чем в полученном по формуле (9.32).

#16

Показатель изменчивости (средней продолжительности платежей) для портфеля облигаций рассматривается не только как один из важных косвенных показателей риска, но главным образом как индикатор для оценки «поведения» портфеля при изменении уровня процента на рынке. В связи с этим предлагается целенаправленно изменять структуру портфеля для достижения желательного значения показателя изменчивости (duration management).

Изменчивость портфеля облигаций находится как средняя величина

$$D=\sum D_jQ_jP_j/\sum Q_jP_j. \qquad (9.34)$$

Пример 9.17. Найдем для портфелей облигаций примера 9.15 среднюю продолжительность платежей

$$D=\frac{4{,}2\cdot 9{,}5+8\cdot 6+3{,}47\cdot 20}{35{,}5}=4{,}43 \text{ года}.$$

#17

9.5. Оценивание займов и облигаций

Общий принцип оценки. Оценка займов представляет собой один из важнейших видов количественного финансового анализа, имеющего различные практические приложения. В частности, не зная методы оценивания облигаций, нельзя понять принципы оценивания портфеля ценных бумаг, активов корпораций и т.д. Оценка займов заключается в капитализации доходов от облигаций и сводится к определению суммы денег, которая в данный момент времени эквивалентна в финансовом отношении самому займу с учетом его срока, доходности и принятой при оценивании ставки процентов (ставки помещения). Поскольку займы чаще всего реализуются с помощью выпуска и продажи облигаций, то задачу оценки займа рассмотрим применительно к оценке облигации. Практически в методе оценки ничего не меняется, если заем не предусматривает их выпуск.

Оценку облигации или иной формы займа произведем с позиции инвестора. При этом под результатом оценки будем понимать сумму денег, эквивалентную в финансовом отношении всем поступлениям по облигации. Эта сумма (оценочная стоимость) равна современной (капитализированной) величине поступлений от облигации при некоторой заданной ставке процентов, которая в общем случае отличается от купонной формы доходности, показанной на облигации.

Нетрудно убедиться в том, что задача оценивания облигации обратна определению ее доходности. Если последняя заключается в расчете ставки помещения по заданной рыночной цене облигации, то первая — в расчете цены, которая соответствует некоторой рыночной норме доходности и обычно удовлетворяет инвестора. Таким образом, оценка облигации дает в известном смысле условный результат. То, что представляется предпочтительным при одном уровне ставки, может показаться нецелесообразным при другом. В целом, и это показано ниже, чем выше ставка, тем меньше оценочная стоимость облигации.

Определим теперь оценочную стоимость различных видов облигаций.

Облигации без обязательного погашения и с периодической выплатой процентов. Периодические выплаты процентов такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Оценка облигации сводится к определению современной стоимости данной ренты, а именно

$$P=R/i,$$

где R — периодически выплачиваемый доход; i — процентная ставка. Поскольку $R=gN$, то

$$P=\frac{gN}{i}. \qquad (9.34)$$

В свою очередь расчетный курс такой облигации составит

$$P_k=\frac{gN}{iN}100=\frac{g}{i}100. \qquad (9.35)$$

Таким образом, курс облигации прямо пропорционален норме доходности и обратно пропорционален процентной ставке.

Если доход по облигации выплачивается p раз в году, то

$$P=\frac{gN}{p[(1+i)^{1/p}-1]}100; \qquad (9.36)$$

$$P_k=\frac{g}{p[(1+i)^{1/p}-1]}100. \qquad (9.37)$$

Пример 9.18. Пусть облигация без объявленного срока, или другой источник постоянного дохода, приносит 8% годовых. Каков расчетный курс данной ценной бумаги при условии, что ставка помещения равна 12%? По формуле (9.35) находим

$$P_k=\frac{8}{12}100=66,67.$$

Если этот доход выплачивается поквартально, т.е. $p=4$, то

$$P_k=\frac{0,08\cdot 100}{4(1,12^{1/4}-1)}=69,60.$$

Как видим, более частая выплата несколько повысила оценку.

#18

Облигации без периодической выплаты процентов. Если проценты выплачиваются в момент погашения займа, то общая сумма, которую выплачивают владельцу облигаций составит $N(1+g)^n$. Соответственно современная величина платежа и расчетный курс облигации равны

$$P=N\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n; \qquad (9.38)$$

$$P_k=N\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n 100. \qquad (9.39)$$

Облигации с нулевым купоном. Доход от такой облигации представляет собой прирост капитала и равен разности между ценой покупки и выкупной суммой. В большинстве случаев, как уже говорилось, последняя равна номиналу. Тогда

$$P=Nv^n \quad \text{или} \quad P=Cv^n;$$

$$P_k=v^n 100 \quad \text{или} \quad P_k=\frac{C}{N}v^n 100.$$

Оценка облигаций с погашением в один срок и периодической выплатой дохода. Это наиболее распространенный вид облигаций, поэтому рассмотрим метод оценки более подробно. Обратимся сперва к облигации с ежегодными выплатами процентов и погашением по номиналу. В этом случае

$$P=Nv^n+Ra_{n;i}; \qquad (9.40)$$

$$P_k=\left(v^n+\frac{R}{N}a_{n;i}\right)100. \qquad (9.41)$$

Когда доход выплачивается p раз в году

$$P=Nv^n+Ra_{n;i}^{(p)}. \qquad (9.42)$$

$$P_k=\left(v^n+\frac{R}{N}a_{n;i}^{(p)}\right)100, \qquad (9.43)$$

где $a_{n;i}^{(p)}$ — коэффициент приведения p-срочной ренты.

Пример 9.19. Облигация в 1000 руб. погашается через 15 лет по номиналу. Облигация приносит 8% ежегодного дохода. Найти оценку и курс облигации при условии, что ставка процентов, учитываемая при оценке, равна 10%.

Поскольку $n=15$, $i=0{,}1$, $g=0{,}08$, то $R=1000\cdot 0{,}08 = 80$ и $a_{15;10} = 7{,}60608$. В итоге

$$P=1000\cdot 1{,}1^{-15}+80\cdot 7{,}60608=847{,}88; P_k=84{,}79.$$

Допустим теперь, что доход выплачивается по полугодиям (как это чаще всего и бывает на практике), тогда

$$a^{(2)}_{15;10}=\frac{1-1{,}1^{-15}}{2(1{,}1^{1/2}-1)}=7{,}7417;$$

$$P=1000\cdot 1{,}1^{-15}+80\cdot 7{,}7417=862{,}728; P_k=86{,}28.$$

#19

Для облигации, по которой проценты выплачиваются p раз в году и погашения производятся по выкупной цене C, получим

$$P=Cv^n+Ra^{(p)}_{n;i};\ P_k=(v^n+\frac{R}{N}a^{(p)}_{n;i})\cdot 100.$$

Пример 9.20. По условиям займа облигация с номиналом 1000 руб. покупается через 10 лет по цене, превышающей номинальную на 40 руб. Облигация приносит 6% дохода ежегодно; выплата процентов два раза в году. Учитываемая при оценке облигации ставка помещения — 10%. Требуется найти расчетную цену и курс облигации.

Итак, $n=10$, $p=2$, $i=0{,}1$, $g=0{,}06$. По данным задачи $C=1040$, $R=1000\cdot 0{,}06=60$.

$$a^{(2)}_{10;10}=\frac{1-1{,}1^{-10}}{2(1{,}1^{1/2}-1)}=6{,}29455.$$

$$P=1040\cdot 1{,}1^{-10}+60\cdot 6{,}29455=778{,}64; \quad P_k=77{,}86.$$

#20

Влияние факторов. Посмотрим теперь как влияют различные факторы на оценку и расчетный курс облигации. Большинство из этих факторов определяются условиями выпуска облигаций. Это срок, купонная ставка, частота выплат процентов. Единственным «внешним» фактором является ставка помещения. Из формул, определяющих P, следует, что *повышение ставки приводит к уменьшению обоих слагаемых оценки и, следовательно, оценки и расчетного курса в целом.* В таблицах 9.6 и 9.7 приводятся оценки P и их

Таблица 9.6

Зависимость оценки от ставки помещения (n = 10 лет)

i	$1000v^{10}$	$100a_{10;i}$	P
8	463,19	671,01	1134,20
10	385,54	614,46	1000,00
12	321,20	565,02	886,22

Таблица 9.7

Зависимость оценки от ставки помещения (n = 5 лет)

i	$1000v^5$	$100a_{5;i}$	P
8	680,06	399,27	1079,33
10	620,09	379,08	1000,00
12	567,40	360,48	927,88

составляющие для облигации с доходностью 10% годовых в зависимости от ставки помещения ($i=8$, 10 и 12%). Таблицы отличаются только сроком, в первой $n=10$, а во второй $n=5$ лет.

Как видим, оценка облигации — величина изменяющаяся, зависящая от колебаний уровня ссудного процента.

Перейдем теперь к сроку облигации. Как показано выше, оценка облигации состоит из двух слагаемых. С увеличением срока влияние первого элемента (современной величины выкупной цены) понижается, а второго (современной величины купонного дохода) растет. Это свойство нетрудно продемонстрировать на примере. Найдем необходимые оценки для облигаций, у которых $g=10\%$, а сроки равны 5, 10 и 15 лет. Пусть ставка помещения равна 12%. Результаты расчета представлены в таблице 9.8.

Таблица 9.8

Зависимость оценки от срока облигации (i = 12%)

n	$1000v^n$	$100a_{n;12}$	P
5	567,43	360,48	927,91
10	321,97	565,02	886,99
15	182,69	681,09	863,78

Таблица 9.9

Зависимость оценки от срока облигации (i = 10%)

n	$1000v^n$	$100a_{n;10}$	P
5	620,92	379,08	1000
10	385,54	614,46	1000
15	239,39	760,61	1000

У облигаций, которые покупаются по номиналу, сокращение одного элемента оценки точно восполняется ростом другого. Соответствующая иллюстрация приведена в таблице 9.9. (Напомним, что при продаже облигации по номиналу ставка помещения равна купонной ставке: $i=g = 10\%$.)

Приведенные примеры позволяют уловить еще одно специфическое влияние — изменение ставки помещения сказывается сильнее на оценке при увеличении срока. Так, рост ставки с 8 до 12% при сроке 5

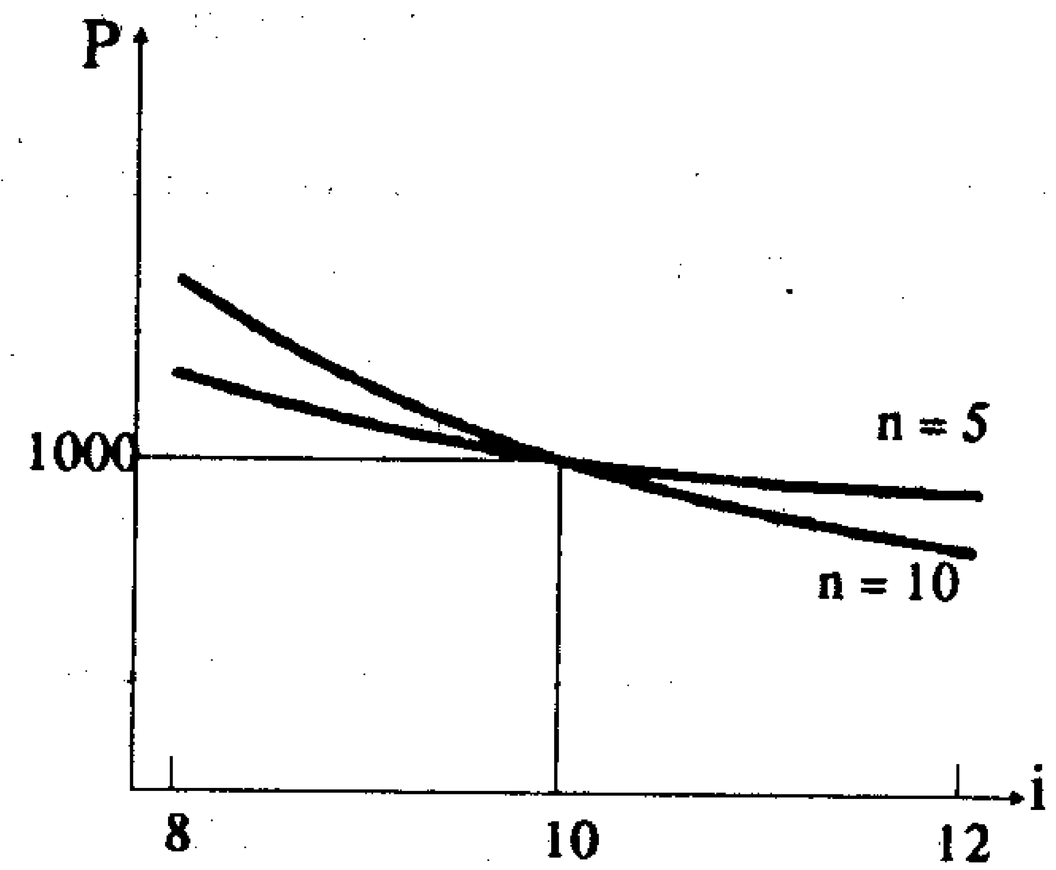

Рис. 9.3

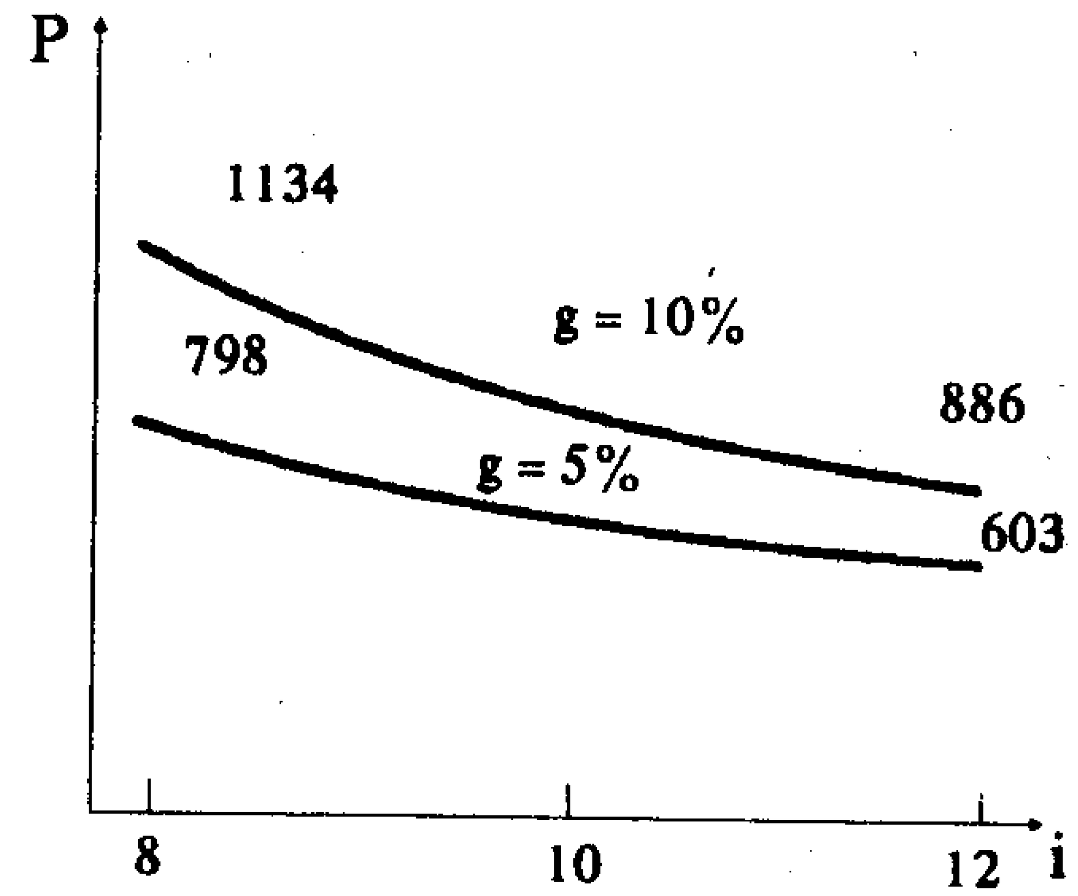

Рис. 9.4

лет (табл.9.7) привел к сокращению оценки с 1079,33 до 927,88 (т.е. уменьшение на 14%), а при сроке 10 лет (табл.9.6) с 1134,20 до 886,22 (почти на 22%). Из сказанного становится понятным поведение инвесторов на рынке ценных бумаг. Так, если на рынке установилась высокая ставка и ожидается дальнейший ее рост, то инвесторы стремятся заменить долгосрочные облигации краткосрочными. При ожидании падения уровня ссудного процента поведение инвесторов обратное — замена краткосрочных облигаций долгосрочными. Сказанное становится ясным при рассмотрении рисунка 9.3, на котором показано изменение расчетной стоимости облигаций по данным таблиц 9.6 и 9.7.

Что же касается купонного дохода, то, очевидно, чем он ниже, тем ниже оценка облигации. При этом повышается чувствительность оценки к изменению ставки помещения. Уменьшение ставки с 12 до 8% повышает оценку на 32% у малодоходной облигации (табл.9.10), а у более доходной (табл.9.6) рост оценки при том же падении ставки процентов составит 28% — см. рис. 9.4.

Таблица 9.10

Оценка облигации при $n = 10$, $g = 5\%$

i	$1000v^{10}$	$100a_{10;i}$	P
8	463,1	335,50	798,69
10	385,54	307,23	612,77
12	321,20	282,51	603,71

Указанное свойство объясняет, почему при ожидаемом падении уровня ссудного процента у инвесторов появляется стремление к приобретению облигаций с меньшей текущей (купонной) доходностью. В этом случае, если происходит снижение уровня ссудного

процента, купленные облигации дают более быстрое увеличение их оценки.

Оценивание акций. Акции, за исключением привилегированных, не относятся к категории ценных бумаг с фиксированным текущим доходом, о которых шла речь в главе. Тем не менее, представляется уместным затронуть вопрос об анализе взаимосвязи «цена акции — ставка помещения», поскольку эта проблема решается на основе того же подхода, что был применен для облигаций.

Цена, по которой продается акция, определяется на рынке ценных бумаг. Она, как известно, складывается в результате игры спроса и предложения и зависит от ряда действующих в различном направлении факторов, отражающих общую экономическую конъюнктуру в стране, развитие соответствующих отраслей экономики и финансовое положение конкретной корпорации, выпустившей акцию, размеры ее реальных активов. К этим факторам относится существующий уровень ссудного процента, размеры выплачиваемых дивидендов, доверие к корпорации и представление о ее развитии в будущем и т.д. Существенное значение имеет общая конъюнктура рынка ценных бумаг и состояние спекулятивной биржевой игры.

Из сказанного становится ясным, что разработка аналитического выражения, в строгой форме учитывающего отмеченные выше и другие факторы, не представляется возможной, тем более, что многие факторы не являются квантифицируемыми.

Очевидный способ оценки стоимости акции сводится к делению объема денежного выражения собственности фирмы на число акций. Номинал акций, как видим, не играет никакой роли. Такой, статический подход однако не учитывает возможность получения дивидендов. С учетом последнего фактора реально возможно найти лишь некоторую теоретическую оценку акции, соответствующую весьма жестким условиям. Подобная оценка базируется на принципе, согласно которому *цена акции есть капитализированная величина будущих дивидендов*, получаемых по ней.

Итак, пусть дивиденды выплачиваются бесконечно долго. Тогда теоретическая цена акции z будет равна современной величине вечной ренты:

$$z=\sum_{t=1}^{\infty} d_t(1+i)^{-t}, \tag{9.44}$$

где d_t — дивиденд, выплачиваемый в году t; i — ставка процента, учитываемая при оценивании (ставка помещения).

Допустим теперь, что дивиденды постоянны, т.е. $d_t = d$ = const, тогда

$$z=d\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}, \tag{9.44}$$

Поскольку, как доказано в главе 4, $\sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{-t}=\frac{1}{i}$, то

$$z=d/i, \tag{9.45}$$

т.е. цена акции равна отношению дивиденда к уроню ставки помещения. Иначе говоря, цена ставки и помещения находятся в обратной зависимости.

Формулу (9.44) можно развить следующим образом. Пусть спустя n лет акция будет продана. Ее текущую оценку тогда можно представить в виде суммы современной величины потока дивидендов и цены реализации:

$$z=\sum_{t=1}^{n}d_t(1+i)^{-t}+z_n(1+i)^{-n}, \tag{9.46}$$

где z_n — цена, по которой продается акция через n лет. Выражение (9.46) не вносит ничего принципиально нового по сравнению с (9.44). В нем размеры дивидендов и значения цены z_n, а также уровень процентной ставки, рассматриваются как известные величины. На самом же деле это трудно предсказуемые переменные даже на сравнительно коротком временном интервале: как дивиденды, так и уровень ссудного процента для будущего — величины, о которых можно лишь только гадать. Существенно также то, что такая оценка не учитывает возможность банкротства. Таким образом, рассмотренный метод оценки акции дает весьма условные результаты. Это, скорее, некоторая теоретическая модель, на основе которой отчетлива видна взаимосвязь «цена акции — ставка помещения», а не метод практического расчета. Попытки усовершенствования метода оценки акции осуществлялись путем введения в формулу (9.44) факторов, описывающих механизм формирования дивидендов* . Например, предполагается, что прибыль, дивиденды и активы увеличиваются с постоянным и одинаковым темпом на протяжении всего периода функционирования корпорации. Постоянными считаются и доля прибыли, идущая на капиталовложения, и доход от новых инвестиций. Нереалистичность перечисленных предпосылок очевидна. Более того, если оценка акции, рассчитываемая по (9.44), зависит только от фиксированного размера дивиденда, который предполагается получить в будущем, то «модернизированные» способы оценки жестко привязаны к целому ряду дополнительных условий.

Уже простое сопоставление формул для оценки теоретических цен облигаций и акций позволяет сделать вывод о сравнительно большей изменчивости последних. На динамику цен облигаций при всех прочих равных условиях влияет только один фактор — движение ссудного процента, на цены акции — динамика дивидендов и уровня ссудного процента. Поэтому при неблагоприятной экономической ситуации (сопровождающейся резким снижением выплат дивидендов) облигации оказываются более доходными, чем акции. Обратное наблюдается при благоприятной экономической конъюнктуре.

* *Проблеме оценивания акций была посвящена международная конференция специалистов в области финансовой математики. Итоги этой конференции обобщены в книге «L'evaluation des actions», P. 1975.*

9.6. Премия и дисконт по облигации

Очевидно, что премия при покупке есть «переплата» за будущие высокие доходы, а дисконт — «недоплата», вызванная низкими текущими поступлениями от облигации. Выше было показано, что размер премии и дисконта зависят от доходности облигаций и принятой для оценки ставки процентов. Для правильной ориентации в управлении инвестициями в облигации необходимо ясно представлять себе аналитическую взаимосвязь размера премии (дисконта) с названными факторами и их динамику в ходе «жизни» облигации. Обсудим эти проблемы при условии, что облигация выкупается по номиналу. Для этого найдем аналитические выражения для премии (дисконта). Предварительно для сокращения записи обозначим первое слагаемое выражения (9.10) как

$$Q=N(1+i)^{-n}.$$

Пусть $E=P-N$. Если $E>0$, то разность представляет собой премию, если $E<0$, то эта величина означает дисконт. Развернем выражение (9.10). Предварительно найдем

$$1-(1+i)^{-n}=\frac{N-Nv^n}{N}=\frac{N-Q}{N},$$

откуда

$a_{n;i}=(N-Q)/Ni.$

Теперь уравнение (9.10) можно представить в виде

$$P=Q+gN\frac{N-Q}{Ni}=Q+\frac{g}{i}(N-Q).$$

Нетрудно найти

$$E=Q+\frac{g}{i}(N-Q)-N=\frac{g-i}{i}(N-Q). \qquad (9.48)$$

Поскольку разность $N-Q$ всегда положительная величина (так как $Q=Nv^n<N$), то $E>0$ когда $g>i$ и наоборот, если $g<i$, то E отрицательна. Преобразовав (9.48), получим наиболее удобную формулу для расчета E

$$E=N(g-i)a_{n;i}=Nh.$$

В этом выражении зависимость E от разности $g-i$ наиболее наглядна. Если эта разность равна нулю, то нулевым будет и значение E. Кроме того видно, что премия (дисконт) пропорциональна выкупной цене. Коэффициент пропорциональности h определяется всеми условиями займа.

Если облигация выкупается не по номиналу, а по выкупной цене C, то вместо (9.48) получим

$$E=\frac{m-i}{i}\cdot(C-Q), \qquad (9.49)$$

где $m=\frac{gN}{C}$ — отношение текущего дохода к выкупной цене.

Пример 9.21. Облигация выкупается через 10 лет по номиналу 1000 руб., доходность — 12%, ставка процента, принятая при оценке, равна 10%. Найти размер премии. По условиям задачи, $g=0{,}12$, $R=120$.

Для решения задачи найдем $a_{10;10}$ = 6,144567. Теперь по формуле (9.49) определим

$$E=1000(0{,}12-0{,}1)\cdot 6{,}144567=122{,}89.$$

#21

Возмещение премии и погашение дисконта. Проблема оценки облигации возникает не только при ее покупке (продаже) на рынке ценных бумаг, но и тогда, когда она находится у владельца. В самом

деле, с течением времени ее оценка меняется, так как, во-первых, приближается дата погашения (соответственно уменьшается влияние дисконтирования выкупной цены), во-вторых, происходят выплаты дохода по облигации (соответственно сокращается тот элемент оценки, который учитывает будущие поступления). Зависимость оценки от времени видна во всех формулах, определяющих P. Например, в (9.10) P есть функция v и $a_{n;i}$, последние же величины — функции времени и ставки процентов.

Посмотрим теперь, к каким изменениям в премии и дисконте облигации приводит ход времени. Для этого запишем формулу цены облигации для ряда моментов времени, приходящихся на окончания отдельных периодов. Обозначим эти моменты времени через t. Пусть для простоты облигация выкупается по номиналу. Тогда на начало первого периода оценка составит величину

$$P_0=Nv^n+Ra_{n;i}.$$

Для момента t $(t=1, \dots, n)$ оценка определяется по формуле

$$P_t=Nv^{n-t}+Ra_{n-t;i}, \qquad (9.50)$$

где $n-t$ — срок, оставшийся до момента погашения.

Для последнего периода имеем $P_n=N$, так как предполагается, что доход от облигации уже получен.

Пример 9.22. Пусть облигация характеризуется следующими данными: $N=1000$, $n=8$, $g=0{,}08$. Найдем значения отдельных элементов расчетной оценки облигации и премии при условии, что $i=6\%$. Соответствующие показатели приведены в табл. 9.11.

Таблица 9.11

t	Nv^{n-t}	$Ra_{n-t;i}$	P_t	E_t
	627,41	496,78	1124,19	124,19
1	665,06	446,59	1111,65	111,65
2	704,96	393,38	1098,34	98,34
3	747,26	336,99	1084,25	84,25
4	792,09	277,21	1069,30	69,30
5	839,61	213,84	1053,45	53,45
6	890,00	146,67	1036,67	36,67
7	943,40	75,47	1018,87	18,87
8	1000,00	0,00	1000,00	0,00

#22

Поскольку покупная цена облигации эквивалентна будущим поступлениям от нее, то спустя некоторое время после выпуска облигации, а точнее, после каждой выплаты дохода, премия будет сокращаться и к концу срока, т.е. в момент погашения облигации, будет равна нулю. Таким образом, по мере выплат дохода, расчетная цена облигации приближается к ее выкупной цене. Этот процесс называется возмещением премии.

Из сказанного выше непосредственно следует, что курс облигации, купленной с премией, по мере приближения к концу срока уменьшается. Наоборот, курс облигации, купленной с дисконтом, повышается.

9.7. Оценка активов

Рассмотренные выше методы оценки ценных бумаг позволяют понять некоторые моменты в оценке активов финансовых организаций и учреждений. В ряде таких организаций (например, страховых компаниях, некоторых международных фондах и т.д.) большая часть активов состоит из ценных бумаг — различного вида облигаций и акций. Проблема оценивания такого рода активов сводится к проблеме оценивания суммарной стоимости ценных бумаг по состоянию на какой-либо момент. Метод оценки активов, рассмотренный здесь, опирается на результаты анализа, полученные выше.

Предварительно приведем самые общие положения об оценке активов. Активы оцениваются как по балансовой стоимости, т.е. фактическим ценам их приобретения (cost value, book value), так и по рыночной их цене (market value). Движение активов по балансовой стоимости за год представим в виде простого тождества

$$B_0+I+L+K=B_1,$$

где B_0, B_1 — балансовая стоимость активов на начало и конец года; I — проценты и дивиденды, полученные за год; L — чистый реализованный доход от ценных бумаг (реализованный доход от повышения стоимости ценных бумаг); K — сальдо текущих поступлений и выплат финансовой организации.

В свою очередь, баланс активов по рыночным ценам запишем следующим образом

$$M_0+I+L+U+K=M_1,$$

где символы I, L и K имеют тот же смысл, что и выше; M_0, M_1 — рыночные цены активов на начало и конец года; U — прирост нереализованного дохода (unrealized gain).

Наибольший интерес здесь представляет величина U. На первый взгляд, она не должна входить в приведенное балансовое уравнение, так как соответствующая прибыль не получена. Однако это будет неверно, так как эта величина представляет собой рост цены ценных бумаг за год и может быть реализована при их продаже. В частности, для облигаций эта величина представляет собой суммарный погашенный дисконт, о котором говорилось при оценивании облигаций. Погашенный дисконт, как доказано выше, увеличивает оценку облигации и ее курс, следовательно, величина U должна входить в M_1 как положительный ее компонент.

Поскольку M_0 и M_1 определяются на основе рыночных котировок, а K и $I+L$ устанавливается по данным текущего учета, то на основе балансового уравнения можно определить неизвестное суммарное для всего портфеля ценных бумаг значение U.

Рыночные цены бумаг в значительной степени подвержены конъюнктурным колебаниям, поэтому оценка активов также оказывается зависимой от колебаний на рынке ценных бумаг. В связи с этим считается достаточно рискованным в качестве основы для каких-либо экономических решений (например, о соответствии активов принятым обязательствам финансового учреждения) принимать оценку активов по рыночным ценам. Иногда рекомендуется разработка такой методики оценки, которая дает некоторый средний результат (суммарную стоимость активов), несколько превышающий балансовую их стоимость, но меньше рыночной. В большинстве случаев применяется методика оценивания, предусматривающая сглаживание колебаний рыночной стоимости активов. В связи с этим в ряде методик в рыночную стоимость активов включают не действительную величину нереализованного дохода, а некоторое сглаженное за период его значение.

Методы возмещения премии и накопления дисконта имеют прямое отношение к проблеме оценки портфеля ценных бумаг. Пусть портфель ценных бумаг частично или полностью состоит из облигаций. Оценка облигаций, как показано выше, изменяется во времени, даже если ставка не меняется. Характеристика этого процесса дает возможность понять механизм формирования дохода от облигаций в целом и причину, которая привела к тому, что при определении активов корпораций доход от облигаций делится на две части — реализованный и нереализованный. Под первым понимаются фактически полученные проценты, под вторым — прирост расчетной цены облигации.

ГЛАВА 10. ФОРФЕЙТНАЯ ОПЕРАЦИЯ

10.1. Сущность операции а форфэ

В конце пятидесятых, начале шестидесятых годов возник новый тип финансово-кредитных операций — а форфэ (от французского a forfait). Эта операция получила рапостранение во внешней торговле, где она послужила важным стимулирующим фактором развития. Заметим, что нет никаких веских причин, препятствующих ее применению и во внутристрановой торговле.

К форфетированию (forfeiting) прибегают при продаже какого-либо крупного объекта (комплекта оборудования, судна, предприятия, крупной партии товара). Покупатель (импортер) приобретает товар в условиях, когда у него нет соответствующих денежных ресурсов. Вместе с тем продавец (экспортер) также не может отложить получение денег на будущее и продать товар в кредит. Противоречие разрешается следующим образом. Покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который как бы предоставляется покупателю. Сроки векселей равномерно распределены во времени. Обычно (но не обязательно) предусматриваются равные интервалы времени (полугодия) между платежами по векселям. Экспортер сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая деньги в самом начале сделки. Таким образом, фактически не сам продавец кредитует покупателя — кредит полностью предоставляется банком. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

Итак, в операции а форфэ увязываются интересы продавца, покупателя и банка. В качестве четвертого агента сделки иногда выступает гарант-банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Каждая участвующая в сделке сторона преследует собственные цели и предусматривает возможность их достижения при разработке условий соглашения.

Цель продавца (экспортера) — получить при учете векселей сумму, равную оговоренной цене товара. Если окажется, что полученная от банка сумма меньше, чем эта цена, то продавец увеличивает договорную цену. Второй возможный путь компенсации ущерба — повышение платы за кредит (увеличение ставки процентов). Форфетирование позволяет продавцу: обеспечить необходимый покупателю кредит (за чужой счет); получить необходимые ему деньги в начале сделки и тем самым устранить риск отказа покупателя от платежей и риск, связанный с колебанием процентных ставкок; устранить или сократить расходы по организации кредитования и страхованию.

Цель покупателя (импортера) — приобрести продукцию с наименьшими совокупными издержками. Расходы покупателя заключаются в погашении последовательно предъявляемых ему векселей. Форфетирование дает возможность покупателю приобрести товар в кредит.

Позиция банка. Для банка форфейтная операция — обычная операция учета векселей. Эффективность этой операции определяется значением учетной ставки и числом векселей.

Аализ такого рода сделки можно осуществить с позиции каждого из участвующих в ней агентов с учетом указанных выше целей. Следует подчеркнуть, что интересы сторон здесь переплетены в большей мере, чем это может показаться на первый взгляд. В связи с этим, анализируя позицию каждого участника операции необходимо принимать во внимание интересы остальных участников.

10.2. Анализ позиции продавца

Определение суммы векселя. Продавец должен получить при учете векселей сумму, равную цене товара. Соответственно, анализ для него заключается в определении суммы, которая должна быть указана на векселях. Если окажется, что учет векселей дает величину, меньшую, чем оговоренная цена, то продавец должен поправить положение. Обычно на практике для этого повышают исходную цену. Как показано ниже, альтернативой может служить повышение ставки процентов за кредит. Ясно, что какой бы путь ни был принят, повышение исходной цены или ставки процентов не может быть произвольным.

Сумма векселя (V_t) состоит из двух элементов: суммы, погашающей основной долг (цену товара), и процентов за кредит. Последние определяются двумя способами:

а) проценты на остаток заложенности; в этом случае срок, за который они начисляются, начинается с момента погашения предыдущего векселя;

б) проценты на сумму погашения долга, включенную в вексель; в этом случае срок исчисляется от начала сделки и до момента погашения векселя.

Рассмотрим оба способа для случая, когда долг погашается равными суммами. Введем обозначения: n — число векселей или периодов; i — ставка простых процентов, под которую производится кредитование; d — простая учетная ставка, используемая банком при учете векселей; P - цена товара. Если условия операции предусматривают выплату аванса, то последний вычитается из цены и далее не принимается во внимание. Иначе говоря, под P в этом случае будем понимать цену за вычетом аванса.

Вариант а). Погашение основного долга производится равными суммами, соответственно, в каждый вексель включается величина $P{:}n$. Что касается процентов за кредит, то они образуют ряд: Pi, $Pi(1-1/n)$, . . . ,$Pi(1-\frac{t-1}{n})$, . . . , $\frac{P}{n}i$, где i -ставка процентов за период.

Сумма векселя, погашаемого в момент t, составит

$$V_t=\frac{P}{n}+Pi(1-\frac{t-1}{n})=\frac{P}{n}(1+(n-t+1)i). \tag{10.1}$$

Общая сумма начисленных процентов равна

$$Pi\sum_{i}^{n}(1-\frac{t-1}{n}) = \frac{n+1}{2}Pi. \tag{10.2}$$

Наконец, сумма портфеля векселей составит

$$\sum V_t=P(1+\frac{n+1}{2}i), \tag{10.3}$$

Вариант б). В этом случае по определению

$$V_t=P\cdot(1+ti)/n,\quad t=1,\ .\ .\ .\ ,\ n. \tag{10.4}$$

Сумма процентов за весь срок находится как

$$\sum V_t-P=\sum\frac{P}{n}(1+ti)-P=\frac{n+1}{2}Pi. \tag{10.5}$$

Получен тот же результат, что и в(10.2) Различие между вариантами, как показано в примере 10.1, заключается в распределении процентов по периодам.

Пример 10.1. В уплату за товар $P=1$ млн.руб. выписано четыре векселя с погашением по полугодиям. Ставка процентов за кредит — 10% годовых (простых). Определим процентные платежи и суммы векселей двумя методами (все показатели в тыс.руб.).

t	P/n	Вариант а		Вариант б	
		%%	V_t	%%	V_t
1	250	50,0	300,0	12,5	262,5
2	250	37,5	287,5	25,0	275,0
3	250	25,0	275,0	37,5	287,5
4	250	12,5	262,5	50,0	300,0
Итого:		125	1125	125	1125

Как видим, сумма процентов в обоих вариантах расчета одинакова. Однако распределние платежей противоположное: в варианте а) они уменьшаются, в варианте б) растут. Для покупателя вариант б) на первый взгляд представляется более привлекательным. Однако, продавец при этом несет некоторые потери.

Позиция продавца. При учете в банке портфеля векселей продавец получит некоторую сумму A. Если учетная ставка простая, то

$$A=\sum V_t(1-td). \tag{10.6}$$

Величина A представляет собой современную величину всех платежей по векселям, рассчитаную с помощью простой дисконтной ставки d. Напомним, что фигурирующие в формулах величины ставок i и d относятся к интервалам между двумя датами погашения векселей.

Поскольку сумма на векселе определяется двумя способами, найдем величину A для каждого из них.

Вариант а). В этом случае

$$A=\sum_{i}^{n}\frac{P}{n}[1+(n-t+1)i](1-td)=\frac{P}{n}[(1+in+i)(1-td)-i\sum t(1-td)]. \tag{10.7}$$

Для преобразования(10.7) необходимо определить следующие суммы:

$$\sum_{1}^{n}(1-td)=n-d\sum t=n(1-\frac{n+1}{2}d);$$

$$\sum_{1}^{n}t(1-td)=\sum t-d\sum t^2=n\frac{n+1}{2}(1-d\frac{2n+1}{3}).$$

Поставим полученные суммы в(10.7). После ряда преобразований получим

$$A=P[1+\frac{n+1}{2}((1-d)-id\frac{n+2}{3})]. \tag{10.8}$$

Обозначим сумму в квадратных скобках через z_1. Очевидно, что если величина z_1 меньше 1, то продавец получит сумму, которая меньше договорной цены Р. Наиболее простой путь избежать потерь — повысить цену в $1/z_1$ раз. Корректировочный множитель позволяет точно определить необходимую поправку и, кроме того, дает возможность проследить влияние всех воздействующих факторов. В редком случае, когда $z = 1$ и нет необходимости в корректировке — экспортер получает при учете векселей оговоренную сумму.

Не надо забывать, что после корректировки цены необходимо вернуться к задаче определения сумм векселей уже для новой цены товара.

Пример 10.2. По данным примера 10.1 в случае, когда учетная ставка 9,5% годовых, получим следующее значение коэффициента z_1.

$$z_1 = 1 + \frac{4+1}{2}(0{,}05 - 0{,}0475 - 0{,}05 \cdot 0{,}0475 \cdot \frac{4+2}{3}) = 0{,}994375.$$

Таким образом, если все условия сделки останутся без изменений, то продавец получит несколько меньшую сумму вместо оговоренной цены 1 млн.руб. Повышение цены на $\frac{1}{0{,}994375} = 1{,}0056568$ компенсирует потерю продавца. Суммы векселей после корректировки составит 301,697; 289,126; 276,566; 263,984. Учет этих векселей по ставке 4,75% за полугодие дает в сумме 1 млн.руб.

#2

Вероятно, предствляет практический интерес соотношение процентных ставок, при которых продавец не будет нести потери. Очевидно, что искомые ставки можно рассчитать из равенства

$$i - d = id\frac{n+2}{3};$$

в силу чего

$$d^* = \frac{i}{i(n+2)/3+1}; \qquad (10.9)$$

$$i^* = \frac{d}{1 - \frac{n+2}{3}d}; \qquad (10.10)$$

где $d*$ и $i*$ — предельные значения ставок, при которых покупатель не несет потерь, иначе говоря, при которых получаемая им сумма равна цене. Повышение платы за кредит до уровня $i*$ полностью балансирует условия сделки. Разумеется что суммы векселей при этом несколько повысятся.

Пример 10.3. Каков должен быть уровень процентной ставки за кредит, для того, чтобы покупатель не понес ущерба в операции а форфэ при условии, что $d = 4{,}75\%$ (данные примера 10.1, вариант а) расчета сумм векселей). В этом случае

$$i* = \frac{0{,}0475}{1 - 0{,}0475\frac{4+2}{3}} = 0{,}052486.$$

Таким образом, повышение годовой ставки кредита до 10,4972% полностью компенсирует потерю продавца.

#3

Вариант б). Рассмотрим теперь метод расчета коэффициента z для случая, когда сумма векселя определяется по варианту б). Напомним, что интервалы между датами погашения векселей одинаковые, применяются простые ставки процентов по кредиту и учетные ставки. По определению

$$A = \sum_{1}^{n}\frac{P}{n}(1+ti)(1-td), t = 1, ..., n. \qquad (10.11)$$

После ряда преобразований этого выражения получим

$$A = P[1 + \frac{n+1}{2}((i-d) - id\frac{2n+1}{3})]. \qquad (10.12)$$

Сумму в квадратных скобках обозначим z_2. Смысл этого множителя раскрыт выше. Корректирующий цену множитель и в этом случае равен $1/z_2$.

Пример 10.4. Определим по данным примера 10.1 (вариант б) расчета сумм векселей) сумму, которую получит покупатель при условии, что $d = 4{,}75\%$. В этом случае согласно (10.12)

$$z_2 = 1 + \frac{4+1}{2}(0{,}05 - 0{,}0475 - 0{,}05 \cdot 0{,}0475\frac{2 \cdot 4+1}{3}) = 0{,}988437.$$

Корректирующий цену множитель равен 1 / 0,988437 = 1,0116977. Как видим, $z_2 < z_1$ и, следовательно, нужна более значительная корректировка цены.

#4

В таблице 10.1 для иллюстрации приведены значения корректировочных множителей z_2 для учетной ставки $d = 6\%$ и некоторых значений процентной ставки (простые ставки за периоды), n - число периодов (число векселей). Прочерки в таблице означают, что корректировочный множитель меньше единицы, т.е. необходимость в корректировке отпадает.

Таблица 10.1

Корректировочные множители, $d = 6\%$.

n	i,%							
	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1.073422	1.053963	1.035197	1.017087				
4	1.097093	1.072961	1.049869	1.027749	1.006543			
5	1.123343	1.094571	1.067236	1.041233	1.016467			
6	1.152472	1.119069	1.087548	1.057753	1.029548	1.002808		
7	1.184834	1.146789	1.111111	1.077586	1.046025	1.016260		
8	1.220852	1.178134	1.138304	1.101079	1.066212	1.033485	1.002707	
9	1.261034	1.213592	1.169591	1.128668	1.090513	1.054852	1.021450	
10	1.305995	1.253761	1.205546	1.160901	1.119445	1.080847	1.044823	1.011122
11	1.356484	1.299376	1.246883	1.198466	1.153669	1.112100	1.073422	1.037344
12	1.413428	1.351351	1.294498	1.242236	1.194030	1.149425	1.108033	1.069519
13	1.477978	1.410835	1.349528	1.293326	1.241619	1.193887	1.149690	1.108647
14	1.551590	1.479290	1.413428	1.353180	1.297859	1.246883	1.199760	1.156069
15	1.636126	1.558603	1.488095	1.423690	1.364629	1.310273	1.260081	1.213592
16	1.734004	1.651255	1.576044	1.507386	1.444460	1.386578	1.333156	1.283697
17	1.848429	1.760563	1.680672	1.607717	1.540832	1.479290	1.422475	1.369863
18	1.983733	1.891074	1.806685	1.729505	1.658650	1.593372	1.533037	1.477105
19	2.145923	2.049180	1.960784	1.879699	1.805054	1.736111	1.672241	1.612903
20	2.323567	2.244165	2.152853	2.068680	1.990842	1.918649	1.851509	1.788909

Найдем по таблице 10.1 значение корректировочного множителя для портфеля из 10 векселей с погашением по полугодиям, учетная ставка 12%, ставка по кредиту 10%, обе ставки годовые. Табличное значение множителя для $d = 6\%$, $i = 5\%$, $n = 10$ составит 1,205546.

В финансовой литературе предлагается иной корректировочный множитель* , а именно

$$x = [(1+it)(1-dT)]^{-1},$$

где t и T - средние сроки начисления процентов и векселей. Средние сроки несколько различаются, так как при их расчете применяются разные методы. Величина t определяется как простая средняя из сроков платежей; T — как средняя взвешенная этих же сроков с весами, равными V_t. Можно доказать, что данный метод определения корректировочного множителя дает точно такой же результат, что и $1/z_1$ только в случае, когда суммы векселей определяются методом б).

* *Forfeiting. Finanz A.C.Zurich. 1983.*

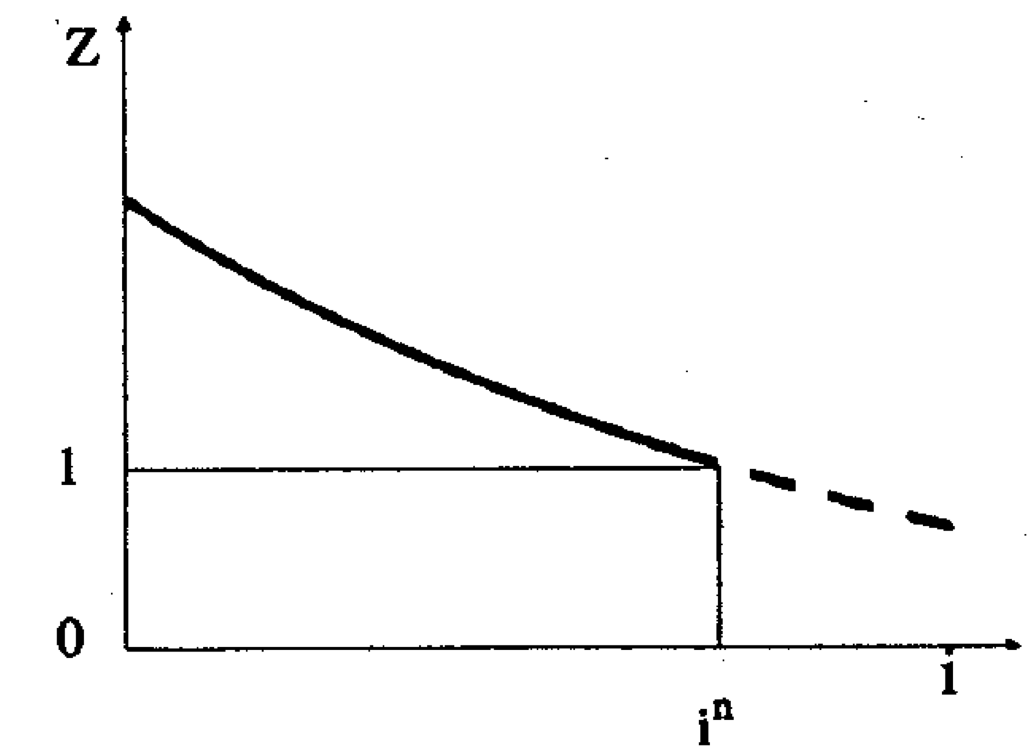

Рис. 10.1

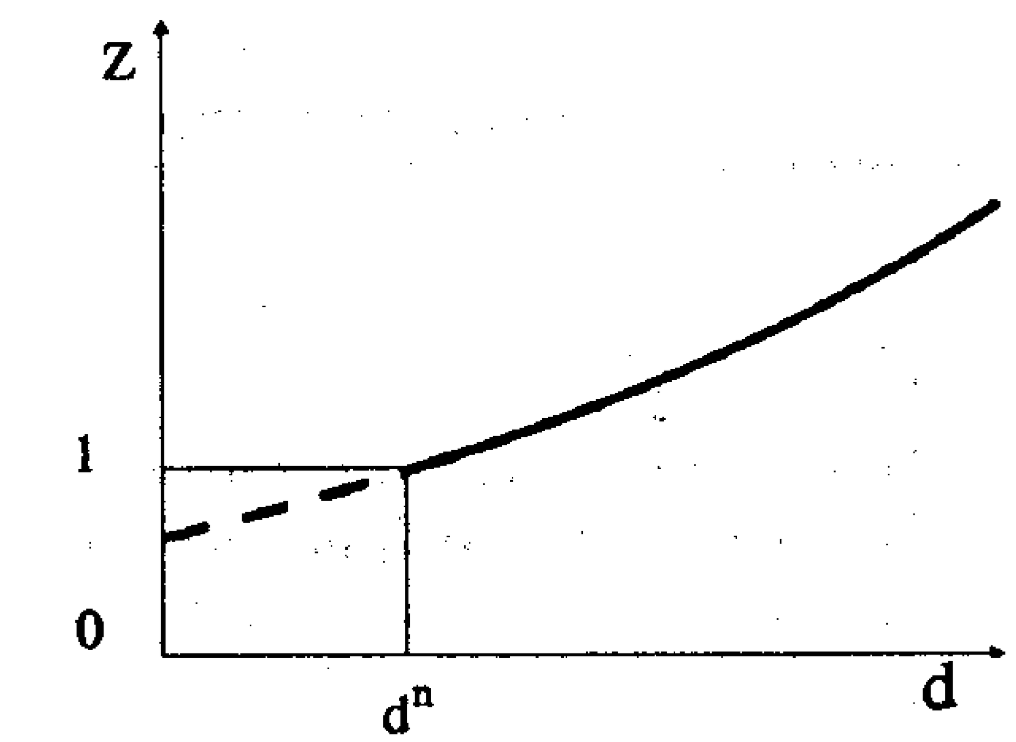

Рис. 10.2

Проследим теперь зависимость множителя z от каждого из парметров, характеризующих условия сделки, — i, d и n. При увеличении i множитель z уменьшается. Этот процесс более заметен при низких значениях i, чем при высоких. На рис.10.1 показана зависимость z от i.

Влияние изменения учетной ставки противоположно влиянию динамики ставки процентов. С ростом d коэффициент z увеличивается. На рис.10.2. показана зависимость z от d при фиксированных значениях i и n.

Что же касается влияния числа платежей n на множитель z, то, очевидно, что при $i<d$ рост n приводит к уменьшению z и необходимость в корректировке условий для продавца возрастает.

Из сказанного следует, что для того, чтобы условия сделки не приводили к необходимости значительного увеличения исходной цены, экспортер должен стремиться уменьшить отрицательный разрыв между ставкой процентов и дисконтной ставкой. По крайней мере, он заранее должен учитывать неблагоприятное воздействие условия $i<d$.

Перейдем теперь к корректировке условий сделки с помощью изменения ставки процентов за кредит. Единственное значение i, при котором экспортер не терпит убытки, нетрудно определить из условия, согласно которому $z=1$. Для того, чтобы удовлетворить это требование, необходимо выполнение следующего равенства:

$$(i-d)\frac{n(n+1)}{2} = id\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решим его относительно i:

$$i^*=\frac{d}{1-\frac{2n+1}{3}d}. \qquad (10.13)$$

Таким образом, при любой ставке процентов, меньшей чем i^*, и заданных P, d и n экспортер нуждается в корректировке условий, иначе он получит при учете векселя сумму, которая меньше оговоренной цены.

Пример 10.5. По данным примера 10.1 (вариант б) и при условии, что d = 4,75% находим

$$i^*=\frac{0{,}0475}{1-\frac{2\cdot 4+1}{3}0{,}0475}=0{,}0553935.$$

Таким образом, у покупателя имеется две возможности для компенсации потерь при учете портфеля векселей — повысить цену товара на 1,0116977 или увеличить ставку за кредит до 11,0787 годовых.

#5

Аналогичным образом найдем значение d, при котором нет необходимости корректировать условия сделки. Получим:

$$d^*=\frac{i}{1+\frac{2n+1}{3}i}. \qquad (10.14)$$

Пример 10.6. По данным примера 10.1 (вариант б) находим

$$d^*=\frac{0{,}05}{1+\frac{2\cdot 4+1}{3}0{,}05}=0{,}0437826.$$

#6

Корректировка цены и ставки по кредиту приводят примерно к одинаковым результатам, однако небольшое различие все же наблюдается. Для иллюстрации сказанного обратимся к примеру.

Пример 10.7. Первоначальные условия сделки: P = 1200 тыс.руб., ставка по кредиту за полугодие 3%, учетная ставка за полугодие — 4,5%. Проценты начисляются на сумму векселя (вариант б). Выписывается шесть векселей с последовательным погашением по

полугодиям. Поскольку $i<d$, то сразу можно сказать, что необходима корректировка исходных условий. Корректировочный множитель, рассчитанный по формуле(10.12) составит 1,0787196. Таким образом. сумма векселя без начисленных процентов равна 200·1,07872 = 215,74. Суммы векселей с начисленными процентами по ставке 3% показаны в таблице 10.2.

Применим второй метод корректировки, находим

$$i*=\frac{0{,}045}{1-\frac{2{,}6+1}{3}0{,}045}=0{,}0559.$$

Значение сумм векселей, полученных наращением 200 тыс.руб. по ставке 5,59% также приведены в этой таблице.

Таблица 10.2.

Период	Умножение суммы платежа на множитель $1/z_2$		Повышение ставки процентов до $i*$	
	сумма платежа	дисконт	сумма платежа	дисконт
1	222,22	10,00	211,18	9,50
2	228,69	20,58	222,36	20,01
3	235,16	31,75	233,54	31,53
4	241,63	43,49	244,72	44,05
5	248,11	55,82	255,90	57,58
6	254,58	68,74	267,08	72,11
Итого	1430,39	230,39	1434,78	234,78

Нетрудно убедиться в том, что при любом методе корретировки экспортер получит сумму, равную оговоренной цене (1200), как это и требовалось доказать. Небольшое различие между итоговыми суммами векселей (и дисконта) объясняется тем, что распределение платежей по срокам несколько различается. В первом случае оно более равномерное (минимальная сумма 222,22, максимальная 254,58), во втором — первый вексель выписывается на сумму 211,18, последний — на 267,08. Небольшая отсрочка приводит к увеличению общей суммы платежа по векселям, а также суммы дисконта.

10.3.Анализ позиции покупателя и банка

Совокупные издержки покупателя. Последовательность погашения векселей можно рассматривать как поток платежей. Совокупные издержки покупателя с учетом фактора времени, как известно, можно получить, рассчитав современную величину этого потока платежей. В 10.2 было показано, что сумма векселя может быть получена двумя путями: вариант а) — проценты по кредиту начисляются на остаточную сумму долга, вариант б) — проценты начисляются на сумму погашения основного долга по векселю. Определим совокупные издержки покупателя для этих двух вариантов с учетом того, что условия сделки сбалансированы, т.е. с необходимой корректировкой цены с помощью множителя $1/z$.

Вариант а). Для этого варианта современная величина платежей по векселям составит

$$W_1=\frac{1}{z_1}\sum V_t v^t=\frac{P}{z_1 n}\sum\left[1+(n-t+1)i\right]v^t;\quad t=1,\ldots,n, \qquad (10.15)$$

где v — дисконтный множитель по ставке q.

Разумеется, величину W_1 можно рассчитать и при условии, что цена товара уже уточнена, тогда отпадает необходимость в корректирующем множителе $1/z_1$.

Пример 10.8. По данным примера 10.1 (вариант а) при условии, что ставка, которая характеризует средний уровень ссудного процента на рынке, равна, допустим 15% годовых, что соответствует ставке за полугодие $q=1{,}15^{-0{,}5}-1=0{,}07238$ или 7,238%. Величины V_t приведены в таблице примера 10.1, значение z_1 найдено в примере 10.2, $z_1=0{,}994375$. Откуда

$$W_1=\frac{1}{0{,}994375}(300\cdot 1{,}07238^{-1}+287{,}5\cdot 1{,}07238^{-2}+$$

$$+275\cdot 1{,}07238^{-3}+262{,}5\cdot 1{,}07238^{-4})=956{,}65 \text{ тыс.руб.}$$

#8

Вариант б). При начислении процентов на сумму векселя получим

$$W=\frac{1}{z_2}\sum V_t v^t=\frac{1}{z_2}\sum\frac{P}{n}(1+ti)v^t. \qquad (10.16)$$

Пример 10.9. Для варианта б) начисления процентов (данные примера 10.2) находим при условии, что $z_2=0{,}988437$ (см.пример 10.4) и $q=7{,}238\%$

$$W_2=\frac{1}{0{,}988437}(262{,}5\cdot 1{,}07238^{-1}+275\cdot 1{,}07238^{-2}+$$

$$+287{,}5\cdot 1{,}07238^{-3}+300\cdot 1{,}07238^{-4})=954{,}92 \text{ тыс.руб.}$$

Как видим, такой способ начисления процентов при условии, что $q>i$, дает меньшую сумму совокупных издержек, чем при варианте а).

#9

Минимизация издержек. Очевидно, что величина W зависит от таких параметров сделки, как n, i, z при заданном значении q. В свою очередь параметр z зависит от n, i и, что важно, от учетной ставки d — (см.10.8 и 10.12). Для того, чтобы продолжить анализ и проследить полное влияние факторов вернемся к выражениям (10.15) и(10.16). Раскроем скобки в(10.15), получим

$$W=\frac{P}{z_1 n}\left[(1+i+ni)\sum v^t-i\sum tv^t\right].$$

Напомним, что $\sum v^t=\frac{1-v}{q}$. В свою очередь можно доказать, что

$$\sum tv^t=\frac{1}{q}\left(\frac{1-v^n}{1-v}-nv^n\right).$$

Теперь можно показать, что

$$W_1=\frac{Pi}{z_1 nq}\left(\left(\frac{1}{i}+n+1\right)(1-v^n)-\left(\frac{1-v^n}{1-v}-nv^n\right)\right).$$

Аналогично для варианта б) получим

$$W_2=\frac{P}{z_2 n}\left(\sum v^t+i\sum tv^t\right)=\frac{Pi}{z_2 nq}\left(\frac{1}{i}(1-v^n)+\left(\frac{1-v^n}{1-v}-nv^n\right)\right).$$

Введем в полученные уравенения значения z_1 и z_2

$$W_1=\frac{Pi}{nq}\cdot\frac{\left(\frac{1}{i}+n+1\right)(1-v^n)-\left(\frac{1-v^n}{1-v}-nv^n\right)}{1+\frac{n+1}{2}\left(i-d-id\frac{n+2}{2}\right)}; \qquad (10.17)$$

$$W_2=\frac{Pi}{nq}\cdot\frac{\frac{1}{i}(1-v^n)+\frac{1-v^n}{1-v}-nv^n}{1+\frac{n+1}{2}\left(i-d-id\frac{2n+1}{3}\right)}. \qquad (10.18)$$

Используя полученные функции, проследим некоторые важные в практическом отношении закономерности. Прежде всего можно отметить, что при $q>i$ всегда наблюдается соотношение $W_1>W_2$. Иначе говоря, совокупные издержки покупателя меньше при начислении процентов по варианту б). Причем, чем больше n и q, тем больше разность W_1-W_2.

Влияние исходной цены P просто и очевидно: W пропорционально P. Что же касается учетной ставки, то на первый взгляд представляется, что учетная ставка — дело только договоренности между продавцом и банком и не имеет отношения к покупателю. Однако, как было показано, при $d>d*$ возникает необходимость в корректировке условий сделки (ее удорожанию) и, следовательно, для покупателя в конечном счете небезразлично, по какой ставке будут учитываться векселя. Нетрудно установить, что влияние учетной ставки однозначно по направлению — чем выше d, тем больше сумма приведенных издержек покупателя при всех прочих неизменных переменных. В табл. 10.3 иллюстрируется влияние роста d на приведенные издержки покупателя (вариант 1). Следует добавить, что влияние d становится все более заметным при увеличении n и q.

Влияние ставки процентов i на величину приведенных издержек неоднозначно. В некоторых случаях ее рост приводит к увеличению W, в других — к уменьшению. Однако в любом случае это влияние мало ощутимо в практически приемлемых диапазонах значений q, d и n. Оно становится заметным лишь при больших значениях n. В табл. 10.3 приводятся данные, характеризующие W_2 для разных значений i (варианты 2 и 3). При расчете W_2 приняты следующие параметры: $P=1000$, $q=0{,}1$. В варианте 1 $n=10$, $i=0{,}06$; в варианте 2 $n=10$, $d=0{,}07$; в варианте 3 $n=8$, $d=0{,}05$.

Таблица 10.3

Суммарные приведенные издержки импортера

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3	
d	W_2	i	W_2	i	W_2
0,04	775	0,04	1005	0,04	856
0,05	839	0,05	1006	0,05	855
0,06	916	0,06	1007	0,06	854
0,07	1007	0,07	1008	0,07	853
0,08	1118	0,08	1009	0,08	852
0,09	1258	0,09	1010	0,09	852
0,10	1436	0,10	1010	0,10	851
0,11	1675	0,11	1011	0,11	850
0,12	2008	0,12	1012	0,12	850

Влияние ставки q однозначно — чем она выше, тем меньше величина совокупных издержек.

Наиболее интересной и практически важной является зависимость совокупных издержек от количества последовательно погашаемых векселей n. Нетрудно обнаружить, что при одних сочетаниях исходных параметров (i,d,q) значение W может расти, при других падать. Более того, при *некоторых сочетаниях параметров существует такое количество векселей, при котором совокупные издержки покупателя становятся минимальными.* Строгий аналитический подход для определения оптимального n приводит к громоздким математическим выражениям. Проще рассчитать ряды показателей W для заданного набора параметров и выбрать оптимальное значение n.

В таблице 10.4 приводятся характеристики суммарных издержек W_2 в зависимости от n для трех вариантов условий. Во всех вариантах $P=1000$, $q=0{,}1$. В варианте 1 $d=0{,}05$, $i=0{,}04$; в варианте 2 $d=0{,}06$, $i=0{,}04$; в варианте 3 $d=0{,}07$, $i=0{,}06$. По данным таблицы и из дополнительных расчетов следует, что чем меньше учетная ставка по сравнению со ставкой, принятой при дисконтировании, тем больше значение n, соответствующее минимальной величине издержек. Например, при низком значении учетной ставки ($d=0{,}04$) минимум издержек приходится на $n=13$. Повышение d до 0,06 сдвигает оптимальное для импортера число n до 8. При $d=0{,}07$ оптимальное n равно 5. Графическая иллюстация влияния d на точку оптимума приведена на рис.10.3.

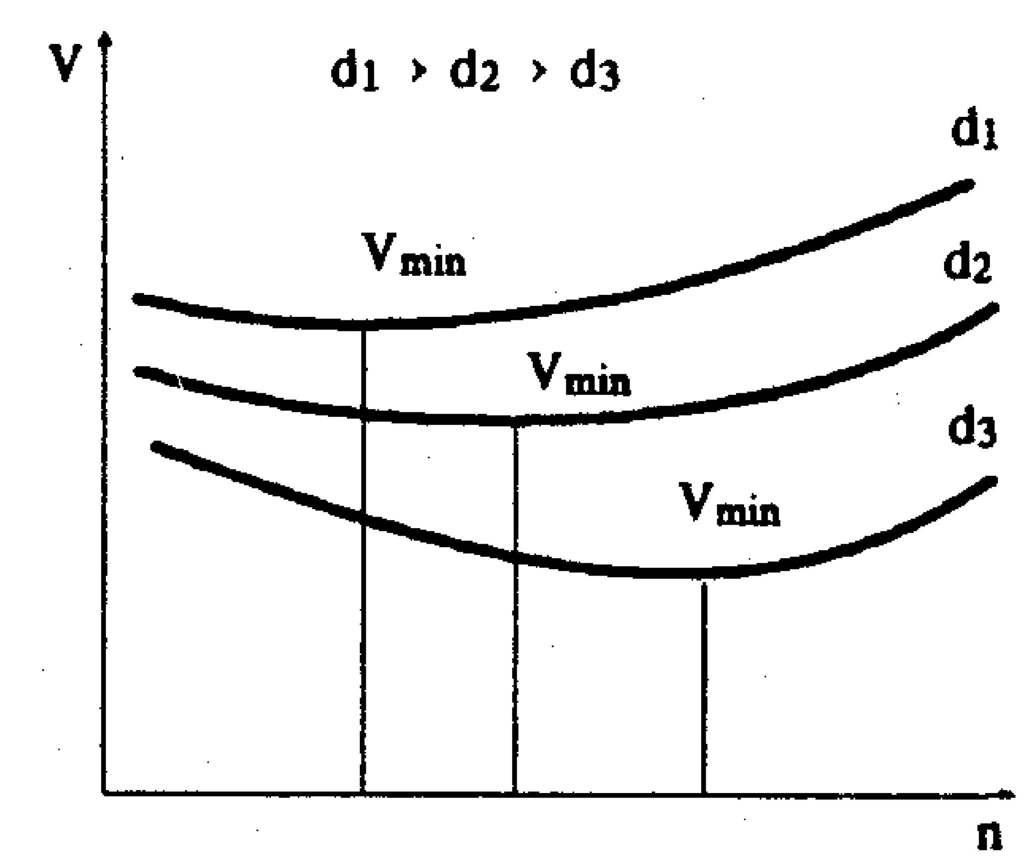

Рис. 10.3

Изменение ставки i практически не отражается на положении точки оптимума. Например, если в варианте 2 ставка процентов была бы не 0,04, а 0,06, то оптимальным опять оказалось бы $n=8$. Влияние n различно по направлению. Поэтому практически удобнее в каждом конкретном случае выполнить ряд расчетов по оценке W для различных значений n.

Повышение ставки сравнения q при всех прочих равных показателях отодвигает точку оптимума. Так, если в варианте 2 принять $q=0{,}15$ вместо $q=0{,}1$, то точка оптимума сдвинется до $n=12$. Соответствующие значения W показаны в таблице 10.4 в скобках (вариант 2).

Таблица 10.4

Суммарные приведенные издержки покупателя W_2

n	Вариант 1 d=5%,i=4%	Вариант 2 d=6%,i=4%	Вариант 3 d=7%,i=6%
4	904	931 (837)	960
5	890	923 (814)	959
6	877	917 (793)	961
7	865	913 (776)	966
8	856	911 (761)	975
9	848	912 (749)	989
10	842	916 (740)	1007
11	837	923 (733)	1031
12	835	933 (730)	1062
13	834	947 (731)	1102
14	836	965 (734)	1153
15	841	989 (743)	1219
16	848	1019 (756)	1304
17	858	1057 (775)	1417
18	871	1105 (800)	1570
19	888	1165 (835)	1787
20	910	1242 (881)	2112

Анализ позиции банка. Банк или другое финансовое учреждение, участвующее в форфейтной сделке, путем учета векселей берет на себя весь риск по проведению операции и заинтересован в получении дохода от инвестированных в векселя средств. Доходность данной операции определяется учетной ставкой. Поскольку общепринятым измерителем эффективности финансовых долгосрочных операций является ставка сложных процентов, то анализ операции с позиции банка заключается в расчете этой ставки, эквивалентной учетной ставке d, примененной при учете комплекта из n векселей с последовательными сроками погашения. Итак, имеется n векселей, которые учитываются по ставке d. Необходимо найти эквивалентную ставку g, т.е. ставку, которая обеспечила бы тот же доход от инвестиций, равных сумме, которую получит экспортер. Пусть банк выплачивает экспортеру сумму, равную P. По определению при условии, что P и V_t сбалансированы, можно написать:

$$P=\sum_{t}^{n} V_t v^t, \tag{10.19}$$

где v^t — дисконтный множитель по неизвестной ставке g. Теперь задача сводится к определению корня v многочлена степени n. Как известно, такая задача решается одним из итеративных вычислительных методов, с которыми мы знакомились в предшествующих главах.

Пример 10.10. По данным примера 10.1 суммы векселей после корректировки составят (вариант б) 265,57; 278,22; 290,86; 303,51. Необходимое для расчета g уравнение имеет вид

$$1000=265,57v+278,22v^2+290,86v^3+303,51v^4.$$

Находим: $g=5,22\%$. Поскольку рассчитана процентная ставка за полугодие, то для получения годовой ставки находим $1,0522^2 = 1,1071$, т.е. 10,71%.

#10

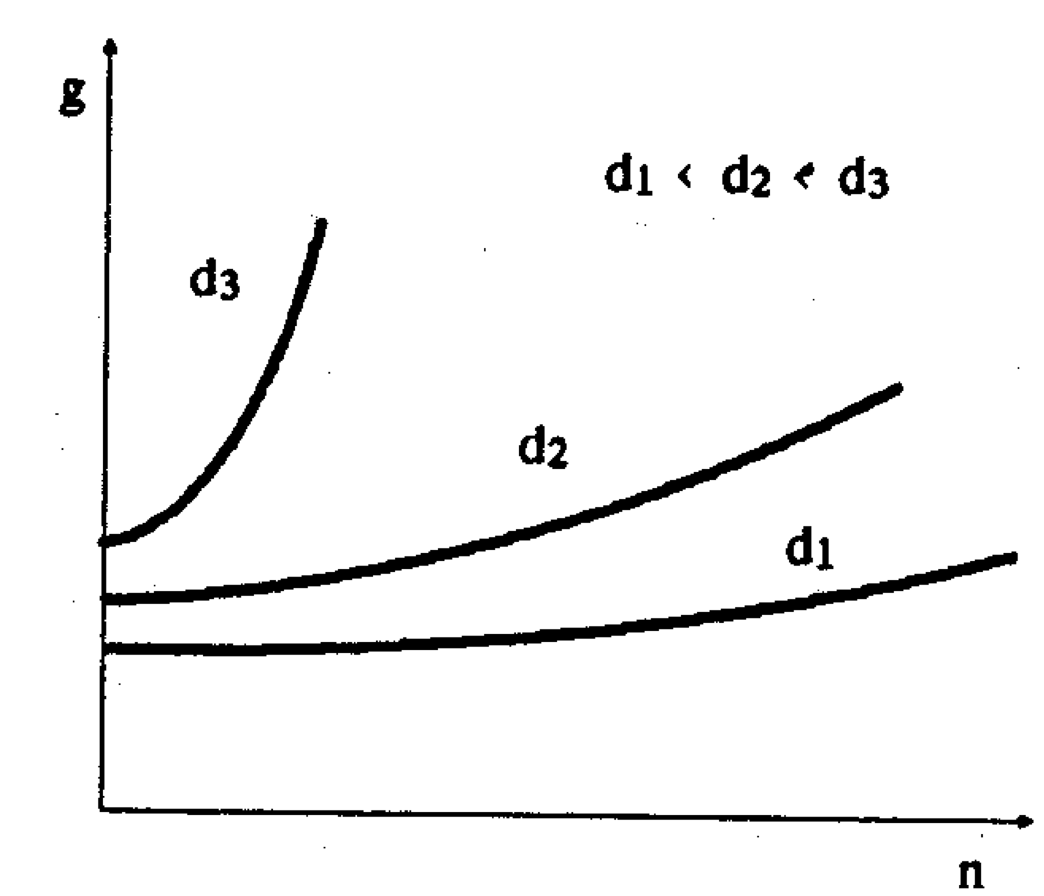

Рис. 10.4

Рост учетной ставки, естественно, оказывает положительное влияние на q. С увеличением n величина g также растет. На рис.10.4 показана зависимость g от указанных двух факторов. Заметим также, что максимальное значение n равно $1/d$. Тогда g становится бесконечным.

Итак, при выработке условий конкретной форфейтной сделки необходим всесторонний количественный ее анализ с позиции заинтересованной стороны, так как финансовые результаты сделки не очевидны и существенно зависят от значений конечных параметров.

Из приведенного выше материала следует, что для продавца, который остерегается существенного повышения цены и в тоже время стремится компенсировать свои потери, средствами управления являются: снижение учетной ставки, повышение ставки процентов за кредит, уменьшение числа векселей (периода погашения). Средствами управления для покупателя являются в основном параметры d и n. Большая величина параметра i играет отрицательную роль лишь при очень высоких значениях n. Следует подчеркнуть, что в большинстве практических случаев современная величина издержек импортера может быть минимизирована. Таким образом, основная задача покупателя в ходе анализа — найти значение n, минимизирующее W . Основным инструментом, воздействующим на эффективность сделки, для банка являются учетная ставка и срок погашения векселей. Увеличение каждого из этих параметров повышает соответствующий показатель эффективности.

ГЛАВА 11. ИЗМЕРЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

11.1 Особенности инвестиционного процесса как объекта количественного финансового анализа

В главах 8 и 9 обсуждались методы анализа, в основном — измерения эффективности финансовых операций, причем каждая такая операция рассматривалась сама по себе, изолированно. Вместе с тем, количественный анализ может быть распостранен и на системы взаимосвязанных операций. В частности, важным объектом приложения количественного анализа являются инвестиционные процессы. Последние с финансовой точки зрения объединяют два противоположных и в известном смысле самостоятельных процесса — создание производственного или иного объекта, или накопление капитала, и последовательное получение дохода.

Указанные два процесса протекают последовательно (с разрывом между ними или без него) или на некотром отрезке времени параллельно. В последнем случае предполагается, что отдача от инвестиций начинается еще до момента завершения процесса вложений. Добавим также, что оба процесса могут иметь разные распределения (закономерности изменения) во времени. Без преувеличения можно сказать, что форма распределений во времени (особенно отдачи) играет здесь если не решающую, то очень важную роль.

Непосредственным объектом анализа в главе являются потоки платежей, характеризующие оба эти процесса в виде одной последовательности. Если речь идет о производственных инвестициях, то в большинстве случаев элементы этого потока формируются из показателей чистого дохода и инвестиционных расходов. Под чистым доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его получением. В эти платежи входят все действительные расходы (прямые и косвенные) по оплате труда и материалов, налоги. Инвестиционные расходы включаются в поток платежей с отрицательным знаком. Отдельный элемент потока платежей определяется следующим образом

$$R_t=(G-C)-(G-C-D)T-K+S; \tag{11.1}$$

где R_t — элемент потока наличности (cash flow) в году t; G — ожидаемый брутто-доход от реализации проекта, например, объем выручки от продажи продукции; C — общие текущие расходы (прямые и косвенные расходы на оплату труда и материалов, амортизационные отчисления сюда не включаются); D — расходы, на которые распространяются налоговые льготы; T — налоговая ставка; K — инвестиционные расходы; S — различные виды компенсаций.

Уравнение (11.1) характеризует общий подход при определении R_t. Оно детализируется в зависимости от целей анализа и принятой в фирме методики.

Анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценивании и сравнивании эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей здесь применяют как формальные характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов, так и показатели, определяемые на основе данных бухгалтерского учета. Заметим, что даже в этой, казалось бы, давно устоявшейся области анализа произошли заметные изменения, которые заключаются в переходе от академических построений к интенсивному практическому приложению и в дальнейшем развитии анализа на базе применения ЭВМ, экономико-математических методов и моделей.

Оценка эффективности осуществляется с помощью расчета системы показателей. Эти показатели и рассматриваются в данной главе. Помимо описания сущности основных характеристик, определяются границы их применения, выявляются факторы, влияющие на эти показатели.

Какой бы метод оценки эффективности капитальных вложений ни был выбран, так или иначе он связан с приведением как инвестиционных расходов, так и доходов от капиталовложений к одному моменту времени, т.е. с расчетом соответствующих современных величин. Наиболее важным моментом здесь является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Условно назовем эту величину *ставкой сравнения*, поскольку оценка эффективности часто осуществляется именно при сравнении вариантов капиталовложений. Какую ставку следует принять в конкретной ситуации — дело экономического суждения и прогноза. Чем она выше, тем в большей мере отражается такой фактор как время — более отдаленные платежи оказывают все меньше влияния на современную величину потока. Из сказанного следует, что получаемые размеры современных величин доходов от капиталовложений являются условными характеристиками, поскольку в существенной мере зависят от принятой для будущего ставки сравнения. В зависимости от конкретной сложившейся ситуации учет фактора времени может меняться, и то, что представлялось предпочтительным в одних условиях, может не оказаться таковым в других.

При выборе ставки сравнения в принципе ориентируются на существующий или ожидаемый усредненный уровень ссудного процента. В литературе рекомендуют применять так называемую минимально при-

влекательную ставку доходности (minimum attractive rate of return). Однако вопрос о том, каков этот минимальный уровень остается при этом неопределенным. Практически выбирают конкретные ориентиры (доходность определенных видов ценных бумаг, банковских операций и т.д.) с учетом условий деятельности соответствующих корпораций. Как показал опрос крупнейших нефтяных фирм США (к данным этого опроса мы будем неоднократно обращаться) наиболее часто при анализе эффективности применяют три варианта ставки: усредненная стоимость капитала (cost of capital) — усредненный показатель доходности акций, процентных ставок по кредиту и т. д.; субъективные оценки, основанные на опыте корпорации; существующие ставки по долгосрочному кредиту. Ставка сравнения, используемая в рыночной экономике, в существенной мере зависит от хозяйственной конъюнктуры, финансового положения инвестора, его способности учесть будущее и т.д.

Важным моментом при определении процентной ставки, применяемой для дисконтирования, является учет риска. Поскольку риск в инвестиционном процессе независимо от его конкретных форм в конечном счете предстает в виде возможного уменьшения реальной отдачи от капитала по сравнению с ожидаемой, причем это уменьшение опять-таки проявляется во времени, то в качестве общей рекомендации по учету риска потерь от сокращения отдачи, инфляционного обесценения денег и т.д. предлагается вводить поправку к уровню процентной ставки, которая характеризует доходность по безрисковым вложениям (например, в краткосрочные государствнные ценные бумаги), т.е. добавлять некоторую рисковую премию, учитывающую как специфический риск, связанный с неустойчивостью получения дохода от конкретного капиталовложения, так и рыночный риск, связанный с конъюнктурой.

Проблема риска является одной из основных при сравнении и выборе вариантов инвестиций. Включение рисковой надбавки в величину процентной ставки является распостраненным, но не единственным средством ее решения. В последнее время произошли заметные изменения в попытках повысить надежность результатов инвестиций. Крупные фирмы стали прибегать к различным усложненным методам, таким как анализ чувствительности (sensivity analysis), применению методов математической статистики, экономико-математическому моделированию. Перечисленные методы уменьшают риск тем, что позволяют лицу, принимающему решение, изучить многовариантную картину возможных последствий (эффектов) в зависимости от изменения условий — входных параметров анализируемых систем. Иначе говоря, предполагается, что риск может быть уменьшен при более основательном пониманий действия механизма формирования прибыли и учете различных влияний, зависимостей и т.д.

В финансовом анализе эффективности инвестиций в основном применяют четыре показателя: чистый приведенный доход, срок окупаемости, внутренняя норма доходности, рентабельность. Заметим, что за рубежом нет единой методологии оценки эффективности инвестиций. По существу, каждая корпорация, руководствуясь накопленным опытом, наличием финансовых ресурсов, целями, преследуемыми в данный момент и т.д., разрабатывает свою методику. Однако, так или иначе, эти методики базируются на упомянутых характеристиках, их сочетаниии и модификациях.

Применяемые методики можно разбить на две группы по тому, учитывают ли они фактор времени с помощью дисконирования или нет. В данной главе внимание сконцентрировано на дисконтных методах, поскольку они преобладают в практике. В следующих трех параграфах внимание будет сосредоточено на описании сущности показателей и раскрытии методики их расчетов, анализе влияния различных факторов на эти измерители, выявлении их взаимосвязей.

11.2 Чистый приведенный доход

Приступим к методике определения показателей эффекта и эффективности капиталовложений и их анализу. В качестве первого измерителя наибольше распосранение получил *чистый приведенный доход* (net present value, NPV). Обозначим этот показатель символом W. Данная величина характеризует общий абсолютный результат инвестиционной деятельности, ее конечный эффект. Под W понимают разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений. Если доходы и капиталовложения представлены в виде потока поступлений, то W равно современной величине этого потока. Величина W является основой для определения большинства измерителей эффективности.

Итак, пусть поток поступлений характеризуется величинами R_t, причем эти величины могут быть как положительными, так и отрицательными. Тогда при условии, что ставка сравнения равна q, имеем

$$W=\sum R_t v^t ,$$

где R_t — размер члена потока платежей; v — дисконтный множитель по ставке q (ставке сравнения). Влияние инвестиционных затрат и доходов от них на W можно представить в более наглядном виде

$$W=\sum_{j=1}^{n_2} E_j v^{j+n_1}-\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t, \tag{11.2}$$

где K_t — инвестиционные расходы в периоде t; E_j — доход в периоде $j, t=1,...,n_1, j=1,...,n_2$; n_1 — продолжительность процесса инвестиций; n_2 — продолжительность периода отдачи от инвестиций.

В формуле (11.2) предполагается, что процесс отдачи идет сразу после окончания инвестиций. Если следует ожидать некоторое запаздывание - (отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта, т.е. $n>n_1$) — то вместо степени $j+n_1$ у дисконтного множителя следует применить $j+n$.

Пример 11.1. Имеются варианты инвестиционного проекта, которые характеризуется следующими потоками платежей:

А	-100	-150	50	150	200	200	
Б	-200	-50	50	100	100	200	200

Варианты, как видим, существенно различаются между собой. При нормативе рентабельности (ставке сравнения) $q = 10\%$ получим: W_A = -212,69 + 377,1 = 164,41; $W_Б$ = -223,14 + 386,19 = 163,05. Таким образом, при принятой процентной ставке сравниваемые варианты в финансовом отношении практически равноценны, если исходить из величины чистого приведенного дохода.

#1

Содержание показателя W легко понять из следующего примера. Пусть капиталовложения полностью осуществляется за счет заемных средств, причем ссуда выдана под ставку q. Наращение процентов на текущий доход также осуществляется по этой ставке. Тогда W представляет собой ожидаемый чистый доход, приведенный к начальному моменту времени.

Перейдем теперь к определению чистого приведенного дохода для случаев, когда отдачи от инвестиций и сами капиталовложения представляют собой последовательность платежей с установленными закономерностями изменений во времени. В этих случаях с помощью формул, полученных для современных величин рент, можно существенно упростить расчет W, более того — создается возможность для развернутого анализа W и показателей эффективности, включая исследование влияния факторов. Пусть вложения и поступления равномерные и дискретные, причем доходы начинают поступать сразу после завершения вложений. Тогда W находим как разность современных величин двух рент:

$$W=Ea_{n_2;q}v^{n_1}-Ka_{n_1;q}.$$

Здесь из современной величины отсроченной ренты (доход) вычитается современная величина немедленной ренты (инвестиции).

Пример 11.2. Инвестиции производятся поквартально по 0,25 млн.руб. на протяжениии трех лет. Ожидаемая отдача оценена в размере 0,7 млн.руб. в год (поступления ежемесячные). Ренты, характеризующие вложения и отдачу, имеют следующие параметры: $K=1, n_1=3, p_1=4, E=0,7, n_2=10, p_2=12$.

Пусть норматив рентабельности равен 10%, тогда находим

$$W=0,7\cdot a^{(12)}_{10;10}\cdot v^3-a^{(4)}_{3;10}=0,7\cdot 6,4213\cdot 0,7513-2,5783=0,8 \text{ млн.руб.}$$

Продолжим пример, допустим теперь, что есть основание рассматривать вложения и отдачу как непрерывные процессы. Тогда

$$W=Ea_{n_2;\delta}v^{n_1}-Ka_{n_1;\delta},$$

где $a_{n;\delta}$ — коэффициент приведения непрерывной ренты. Сила роста составит $\delta = \ln 1,1 = 0,09531$. Окончательно получим

$$W=0,7\cdot\frac{1-1,1^{-10}}{0,09531}\cdot 1,1^{-3}-1\cdot\frac{1-1,1^{-3}}{0,09531}=0,78 \text{ млн.руб.}$$

Пусть отдача от капиталовложений происходит не сразу после их завершения, а, скажем, через один год. Тогда в рамках первоначального варианта постановки задачи (ежеквартальные затраты и ежемесячные поступления) получим

$$W=7\cdot a^{(12)}_{10;10}\cdot 1,1-a^{(4)}_{3;10}=0,5 \text{ млн.руб.}$$

Таким образом, отсрочка на год отдачи от инвестиций заметно снизила чистую приведенную величину дохода.

#2

Рассмотренные выше ситуации, разумеется, не исчерпывают все возможные случаи, с которыми можно столкнуться в практике. Так, совершенно необязательно, чтобы вложения и отдачи следовали одной и той же общей закономерности. Например, вложения могут быть периодическими (условия финансирования), а отдача непрерывная (условия производства). Более того, один и тот же процесс в разных

интервалах времени часто следует различным закономерностям — например, доход в периоде освоения и в периоде полного использования мощностей. Анализ в этих и других случаях должен учитывать особенности распределения инвестиций и доходов во времени. Некоторые из таких ситуаций будут изучены нами при моделировании сложных инвестиционных процессов.

Из приведенных выше выражений ясно, что абсолютная величина чистого приведенного дохода зависит от двух видов параметров. Первые характеризуют инвестиционный процесс, если так можно сказать, объективно. Они определяются производственным процессом. Ко второму виду следует отнести единственный параметр — ставку сравнения. Как уже говорилось, значение этой ставки — результат выбора, в определенном смысле это условная величина. В силу сказанного есть основание определять W не для единственного значения q, а для некоторого диапазона значений ставки.

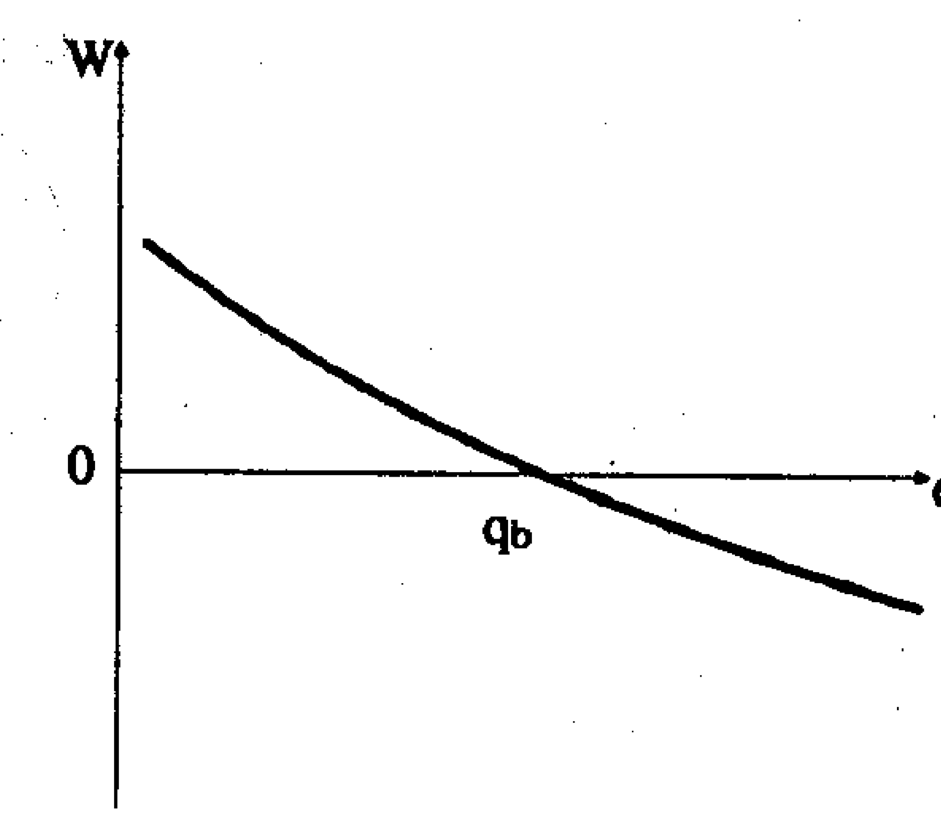

Рис. 11.1

Зависимость W от q для случая, когда вложения осуществляются в начале процесса, а отдача примерно равномерная, иллюстрируется на рис.11.1, где показано, что когда ставка сравнения достигает некоторого значения $q_в$, эффект инвестиции оказывается нулевым. Любая ставка, меньшая, чем $q_в$, соответствует положительной оценке W (содержание показателя $q_в$ и методика его расчета рассматривается ниже). При иных закономерностях в распределении вложений и доходов график зависимости W от q может быть иным — в некоторых условиях W может неоднократно оказаться нулевым или вовсе не иметь нулевого значения.

Остановимся еще на одном важном свойстве показателя чистого приведенного дохода. Выше эта характеристика была определена путем приведения соответствующих сумм к началу инвестиционного процесса. Вместе с тем, представляется возможной и практически важной оценка W на момент завершения процесса вложений или на иной момент времени, по каким-то причинам являющихся важным для исследователя.

Нетрудно доказать, что

$$W_t = W_0(1+q)^t,$$

где W_0 и W_t — величины чистого приведенного дохода, рассчитанные на начало инвестиционного процесса и некоторый момент t. Из приведенной формулы следует, что при сравнении проектов момент оценки должен быть общим для всех сравниваемых проектов. Следует также заметить, что предпочтительный вариант проекта остается таковым при любом выборе момента оценки.

Прежде, чем мы закончим обсуждение свойств чистого приведенного дохода, остановимся еще на одном моменте. Дело в том, что при высоком уровне ставки отдаленные платежи оказывают малое влияние на W. В силу этого различные по продолжительности периодов отдачи варианты могут оказаться практически равноценными по конечному экономическому эффекту. Например, при сравнении двух вариантов отдачи с одинаковой годовой суммой $R = 200$, но с разными сроками выплат (25 и 30 лет) при условии, что инвестиционные затраты к началу отдачи составили $K = 1000$. Находим при $q = 15\%$ для первого варианта $W = 5460$, для второго — 5570, т.е. пять дополнительных лет дают прирост менее 2% в размере ожидаемого эффекта.

Как было показано, проекты с длительной отдачей имеют незначительное преимущество, которое легко может быть перекрыто влиянием какого-либо менее существенного фактора. В то же время ясно, что при всех прочих равных условиях проект с более длительным периодом поступлений доходов предпочтительней. В связи с необходимостью учета этого фактора в финансовой литературе обсуждаются некоторые дополнительные показатели, которые базируются на различных подходах к двум частям потока поступлений — в пределах срока окупаемости и за этими пределами. Те поступления, которые охватываются сроком окупаемости, рассматриваются как покрытие инвестиций, остальные поступления считаются чистым доходом и на них дисконтирование не распространяется. Трудно найти какие-либо экономические обоснования для такой трактовки. Налицо лишь стремление усилить важность второй части потока платежей. С таким же успехом, вероятно, усиление второй части можно было бы достичь и иным путем, например, умножая на какой-либо коэффициент и т.д. Дальнейшая модификация идет по линии еще большего внесения в методики расчета субъективных элементов. Так, теперь уже встречаются утверждения, что деление потока поступлений на основе срока окупаемости вовсе не обязательно. Это деление может осуществляться и любым иным путем. В частности, предлагается просто выделять первые семь лет инвестиционного процесса.

11.3 Основные измерители эффективности капиталовложений

Для характеристики эффективности производственных инвестиций в основном применяют три характеристики: срок окупаемости, внутренняя норма доходности, рентабельность. Перечисленные показатели являются результатами сопоставлений распределенных во времени отдач с суммами инвестиций. Причем эти сопоставления производятся разными методами. Далее будет показано, что указанные характеристики взаимосвязаны. Терминологически первая и третья совпадают с показателями, применяемыми в отечественной практике.

Срок окупаемости (payback method). Один из наиболее часто применяемых показателей. Без учета фактора времени, т.е. когда равные суммы дохода, получаемые в разное время, рассмтриваются как равноценные, показатель срока окупаемости определяется как $n_y = \frac{K}{R}$, где n_y — упрощенный показатель срока окупаемости, K — размер инвестиций, R — ежегодный чистый доход. Если чистый доход поступает неравномерно, то срок окупаемости определяется последовательным суммированием поступлений и подсчетом времени до тех пор, пока сумма чистого дохода не окажется равной сумме инвестиций. За рубежом показатель n_y применяют в основном мелкие фирмы.

С финансовых позиций более обоснованным является другой метод определения срока окупаемости. В этом случае под сроком окупаемости ($n_{ок}$) понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме инвестиций. Таким образом, срок окупаемости представляет собой теоретически необходимое время для полной компенсации инвестиций дисконтированными доходами.

Если инвестиционный процесс представлен в виде нерегулярного потока платежей, то срок окупаемости определяется суммированием последовательных членов ряда доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций. Обсудим теперь вопрос о технике определения интересующего нас параметра для различных форм распределения доходов во времени. Что касается инвестиций, то для анализа достаточно иметь их итог в виде величины K (приведенная к началу периода отдачи величина), следовательно, особенность распределения затрат никак не скажется на значении $n_{ок}$. Рассмотрение методики начнем со случая, когда распределение доходов не следует какой-либо закономерности (произвольный поток поступлений). Тогда $n_{ок}$ определяется суммированием последовательных членов ряда доходов, дисконтированных по ставке q, до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций. Если

доход поступает в конце года, то определяется сумма $S_m=\sum_1^m R_t v^t$, причем $S_m<K<S_{m+1}$. Срок окупаемости равен m плюс некоторая доля года, которая примерно равна $\frac{K-S_m}{R_{m+1}v^{m+1}}$.

Пример 11.3. Предположим, необходимо сравнить по сроку окупаемости два варианта инвестиций примера 11.1. Здесь $K=250$. Для определения n_y (вариант А) суммируем годовые доходы: $50+150+200x=250$, откуда $x = 1/4$ и $n_y=2,25$ года. Аналогично для варианта Б находим $n_y=3,5$ года.

Для оценки $n_{ок}$ найдем сумму инвестиций с процентами по ставке $q=10\%$. Для варианта А это 260 тыс.руб., для Б — 270 тыс.руб. За первые два года получения дохода современная величина дохода (вариант А) составит 169,4 тыс.руб., т.е. меньше 260 тыс.руб., за три года она равна 319,7, т.е. больше чем стоимость инвестиций. Отсюда срок окупаемости (при условии, что доход может выплачиваться и за часть года) составит $n_{ок} = 2 + (260 - 169,4):150,2 = 2,6$ года, где величина 150,2 получена как $200 \cdot 1,1^{-3}$. Аналогичным путем получим для варианта Б: $n_{ок} = 4 + (270-230,2) : 124,2 = 4,32$года.

#3

Перейдем к определению срока окупаемости для распределений доходов, которые можно представить в виде некоторых упорядоченных последовательностей (аннуитетов). Начнем с самого простого случая — с равномерного дискретного (раз в конце года) поступления доходов. Из условия полной окупаемости за срок при заданной ставке следует равенство

$$K=R\cdot\frac{1-(1+q)^{n_{ок}}}{q},$$

откуда

$$n_{ок}=\frac{-\ln(1-\frac{K}{R}q)}{\ln(1+q)}.$$

Аналогичным образом можно найти срок окупаемости для других видов распределения отдачи. В каждом таком случае капиталовложения приравниваются современной величине финансовых рент.

Пример 11.4. Инвестиции к началу поступления доходов составили 4 млн.руб., годовой доход ожидается на уровне 0,7 млн.руб., поступления ежемесячные. Если ориентировантся на ставку $q=10\%$, то (см.табл 4.1) получим

$$n_{ок}=\frac{-\ln(1-4\frac{12}{0,7}\cdot(1,1^{1/12}-1))}{\ln 1,1}=8,3 \text{ года.}$$

Для сравнения заметим, что без учета времени получения доходов срок окупаемости $n_y=5,71$ года. Как видим, разница существенная.

Изменим условия поступления дохода. Пусть они постоянны и непрерывны. Тогда

$$n_{ок}=\frac{-\ln(1-\frac{K}{R}\delta)}{\delta}.$$

Напомним, что δ — ставка непрерывных процентов. Поскольку $q=0,1$, то $\delta=\ln 1,1=0,09531$. Таким образом, $n_{ок}=8,25$ года.

#4

Остановимся еще на важном случае — непрерывном потоке доходов при постоянном темпе их прироста. Для этого случая находим

$$n_{ок}=\frac{-\ln(1+\frac{K}{R}(\gamma-\delta))}{\gamma-\delta},$$

где γ — непрерывный темп прироста показателей дохода.

Далеко не всякий уровень дохода при всех прочих равных условиях приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между поступлениями и размером инвестиций. Так, при ежегодном поступлении постоянных доходов это соотношение имеет вид: $R>qK$ при поступлении постоянных доходов p раз в году $R>p((1+q)^{1/p}-1)K$, при непрерывном поступлении доходов $R>\ln(1+q)K$. *Если перечисленные требования не выполняются, то капиталовложения не окупаются за любой срок*, точнее, этот срок равен бесконечности. На рис. 11.2 иллюстрируется зависимость $n_{ок}$ от соотношения K/R для случая, когда доходы представляют собой постоянную ренту. Приведенные неравенства, вероятно, окажутся полезными для быстрой оценки ситуации.

Пусть $q=10\%$. Капиталовложения равны 4 млн.руб., ожидаемая годовая отдача от инвестиций 0,2 млн.руб.. Исходя из приведенного выше неравенства отдача должна быть больше, чем $qK=0,1\cdot 4=0,4$

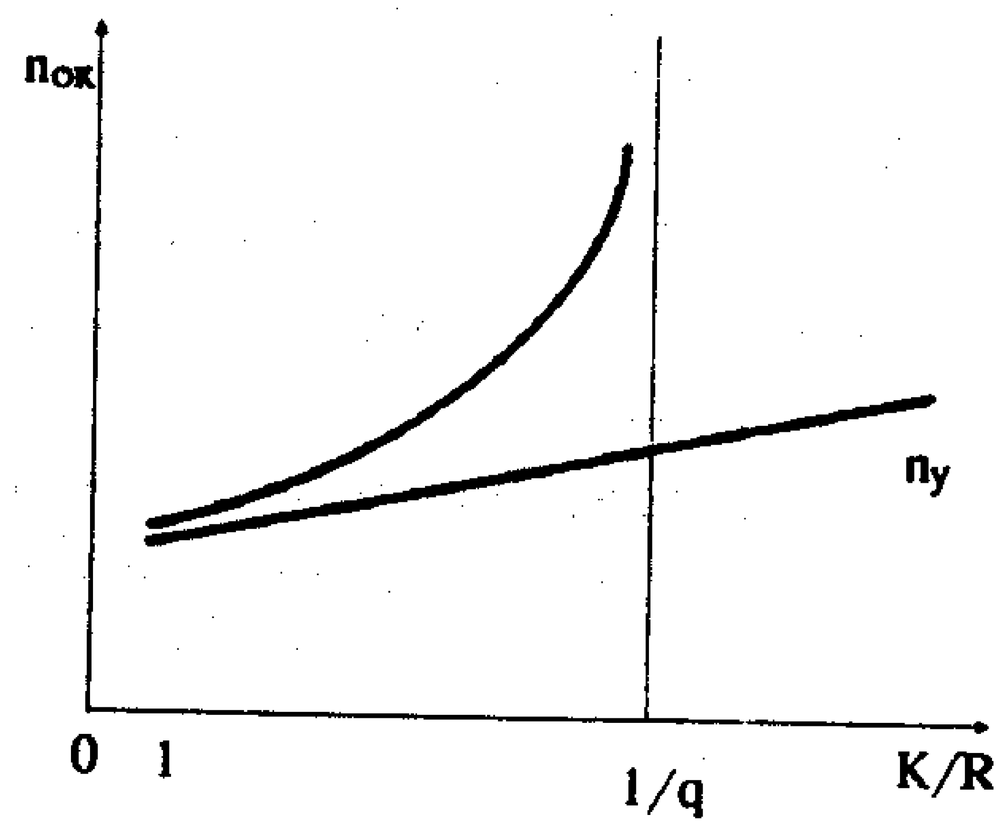

Рис. 11.2

млн.руб. Таким образом, при заданном уровне отдачи инвестиции не окупаются. В то же время упрощенный срок окупаемости (без учета фактора времени) говорит о том, что инвестиции окупятся ($n_y = 20$ лет). Пусть теперь R равно, скажем, 0,6 млн.руб., тогда есть смысл продолжить расчет и найти искомую величину срока окупаемости.

Как видно из рис.11.2 $n_{ок}$ всегда меньше n_y при условии, что $q>0$. Можно показать, что между этими характеристиками существует взаимосвязь, которая зависит от вида распределения показателей чистого дохода во времени. Если эти суммы постоянны, то

$$n_{ок} = \frac{-\ln(1-n_y q)}{\ln(1+q)}.$$

Как видим, эта зависимость полностью определяется уровнем процентной ставки, причем при $n_y q>1$ инвестиции не окупаются.

Основной недостаток показателя срока окупаемости $n_{ок}$, как меры эффективности, на который, впрочем, неоднократно обращалось внимание в литературе, заключается в том, что он не учитывает весь период функционирования инвестиций и, следовательно, на него не влияет вся та отдача, которая лежит за пределами $n_{ок}$. Особенно наглядно этот недостаток проявляется в случае, когда отдачи от вложений капитала неравные. На опасность большого доверия к этим оценкам при решении вопроса о выборе инвестиций указывают и в западной экономической литературе. В частности, высказывалось мнение о том, что, например, такая мера, как срок окупаемости, должна служить не критерием выбора, а использоваться лишь в виде ограничения при принятии решения. Соответственно, если срок окупаемости проекта больше, чем принятое ограничение, то он исключается из списка возможных инвестиционных проектов.

Внутренняя норма доходности. Наиболее часто при оценке эффективности капитальных вложений прибегают к так называемой *внутренней норме доходности* (internal rate of return, JRR). Под внутренней нормой доходности понимают ту расчетную ставку процентов, при

которой капитализация регулярно получаемого дохода дает сумму, равную инвестициям и, следовательно, капиталовложения являются окупаемой операцией. Иначе говоря, при начислении на сумму инвестиций процентов по ставке, равной внутренней норме доходности (обозначим ее как $q_в$), обеспечивается получение распределенного во времени дохода. Чем выше эта ставка, тем больше эффективность капиталовложений. Величина $q_в$ при особо неблагоприятных условиях может показаться нулевой и даже отрицательной.

Если капталовложения осуществляются только за счет привлеченных средств, причем кредит получен по ставке i, то разность $q_в - i$ показывает эффект инвестиционной (предпринимательской) деятельности. При $q_в = i$ доход только окупает инвестиции (инвестиции бесприбыльны), при $q_в < i$ инвестиции убыточны.

Из сказанного выше следует, что уровень $q_в$ полностью определяется внутренними данными, характеризующими инвестиционный проект. Никакие предположения об использовании чистого дохода за пределами проекта не рассматриваются.

За рубежом расчет $q_в$ часто применяют в качестве первого шага количественного анализа капиталовложений. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, $q_в$ которых оценивается величиной не ниже 15-20%. Методика определения $q_в$, как и других показателей эффективности, зависит от конкретных особенностей распределения доходов от инвестиций и самих инвестиций. В общем случае, когда инвестиции и отдача от них задаются в виде потока платежей, $q_в$ определяется на основе решения уравнения

$$\sum_t R_t v^t = 0 \qquad (11.3)$$

относительно v каким-либо итерационным методом. Здесь v — дисконтный множитель по ставке $q_в$, R_t — член потока платежей, который может быть положительной и отрицательной величиной; t — время, измеряемое от начала инвестиционного процесса.

Пример 11.5. Определим $q_в$ для данных примера 11.1 (вариант А). Для имеющегося потока поступлений напишем следующее степенное уравнение, в котором для сокращения записи примем $1 + q_в = r$

$$f(r) = -100r^{-1} - 150r^{-2} + 50r^{-3} + 150r^{-4} + 200r^{-5} + 200r^{-6} = 0.$$

Примем в качестве исходных оценок $r_0 = 1{,}1$ и $r_1 = 1{,}15$, тогда $f(1{,}1) = 164{,}4$, $f(1{,}15) = 104{,}2$. Далее на основе метода секущей последовательно находим

$$r_2 = 1{,}15 - \frac{(1{,}15 - 1{,}1)\cdot 104{,}2}{104{,}2 - 164{,}4} = 1{,}24;$$

$$r_3 = 1{,}24 - \frac{(1{,}24 - 1{,}15)\cdot 34{,}7}{34{,}7 - 104{,}2} = 1{,}2445;$$

$$r_4 = 1{,}2445 - \frac{(1{,}2445 - 1{,}24)\cdot 32{,}1}{32{,}1 - 34{,}7} = 1{,}3.$$

Используя последнюю оценку, получим $f(1{,}3) = 0{,}05$, т.е. f практически близка к нулю. Таким образом, $q_в$ составляет 30%. Аналогичный расчет для варианта Б дает заметно меньший показатель эффективности: $q_в = 25\%$.

#5

Из определения внутренней нормы доходности и приведенного примера расчета следует, что оценку процентной ставки получают, приравнивая чистый приведенный доход нулю. Для графической иллюстрации сказанного вернемся к рис.11.1. Точка пересечения горизонтальной оси координат и кривой W приходится как раз на ставку $q_в$. На этом рисунке кривая пересекает ось один раз. Это типичный случай, однако нельзя забывать о том, что поток платежей иногда отличается от типового. Неординарный поток может предусматривать дополнительные крупные вложения, например, на модернизацию производства спустя некоторое время после первоначальных вложений. В этих ситуациях может оказаться, что кривая W будет пересекать горизонтальную ось не один раз. Следовательно, решение дает не одно, а несколько значений $q_в$. Простейший выход в этом случае — принять во внимание наименьшее из полученных значений $q_в$.

Проследим влияние различных факторов на уровень внутренней нормы доходности. Ясно, что этот параметр зависит от размера капиталовложений и доходов. Причем не только от их соотношения, но в значительной мере и от их распределения (влияние фактора времени). Для того, чтобы изобразить эту зависимость на графике упростим условия. На рис.11.3 показана зависимость $q_в$ от отношения K/R для равномерного дискретного распределения доходов (для других видов потока поступлений она будет иной). Если отношение K/R больше, чем общий срок отдачи от капиталовложений n, то $q_в$ — отрицательная величина, если $\frac{K}{R} = n_y$, то $q_в = 0$, наконец, если $\frac{K}{R} < n_y$, то $q_в > 0$. По

существу, капиталовложения будут неэффективны и в случае, когда $q_в$, хотя и окажется положительной величиной, но будет меньше цены, уплачиваемой за привлеченные средства (i). Сказанное иллюстрируется на рис.11.3, где точка 2 на оси K/R соответствует $q_в = 0$, а точка 1 — случаю, когда $q_в = i$.

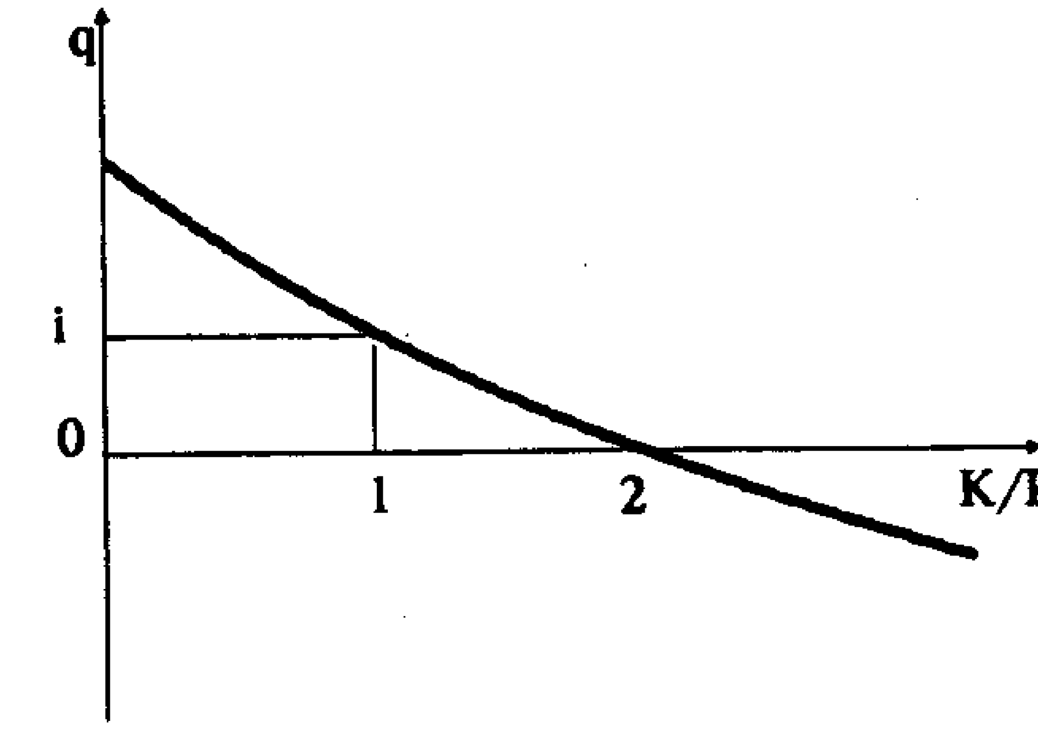

Рис. 11.3

Рассмотрим теперь частный случай, когда отдача от инвестиций может быть охарактеризована постоянной годовой рентой, а инвестиции представлены одной величиной. Тогда задача оценки $q_в$ упрощается. Инвестиции приравниваются современной величине соответствующей ренты, т.е.

$$K = R\cdot\frac{1-(1+q_в)^{-n}}{q_в}.$$

Таким образом, задача сводится к расчету искомой ставки по значению коэффициента приведения. Аналогичным образом поступим и при других видах распределения отдачи от инвестиций.

Рентабельность. Последний из рассматриваемых показателей представляет собой соотношение приведенных доходов к приведенным на эту же дату инвестиционным расходам (benefit-cost ratio). Иногда его называют индексом доходности (profitability index). Условно назовем этот показатель рентабельностью и обозначим как U. Если инвестиции осуществлены разовой выплатой, то

$$U = \frac{\sum E_j v^j}{K}. \qquad (11.4)$$

Если инвестиции представляют собой некоторый поток, то

$$U = \frac{\sum E_j v^{j+n_1}}{\sum M_t v^t}, \qquad (11.5)$$

где $t = 1,...,n_1$; $j = 1,...,n_2$; E_j — показатели чистого дохода; M_t — размеры инвестиционных затрат.

В формулах (11.4) и (11.5), как видим, сравниваются две части приведенного дохода — доходная и инвестиционная.

Пример 11.6. Показатели современных величин вложений и чистых доходов по данным примера 11.1 имеют следующие значения: вариант А — 212,69 и 377,1 тыс.руб., вариант Б — 223,14 и 386,19 тыс.руб. Показатели рентабельности инвестиций $U_A = 377{,}1/212{,}69 = 1{,}77$; $U_Б = 386{,}19/223{,}14 = 1{,}73$, т.е. 77 и 73%.

#6

Показатели рентабельности инвестиций в виде (11.4) и (11.5) характеризуют некоторую дополнительную рентабельность, так как при их расчете доходы уже дисконтированы по ставке q. Если показатель U равен единице, то это означает, что доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности q. При $U<1$ инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают этот норматив.

Пусть теперь поток платежей следует некоторой закономерности, скажем, представляет собой постоянную годовую финансовую ренту. Тогда

$$U=R\frac{a_{n;q}}{K}. \qquad (11.6)$$

Аналогично можно определить рентабельность для иных видов распределения дохода во времени.

Пример 11.7. Пусть как и в примере 11.4 инвестиции равны 4 млн. руб., годовой доход — 0,7 млн.руб., поступления ежемесячные, срок — 10 лет. Если $q = 10\%$, то

$$Ra_{n;q}^{(p)}=0{,}7\cdot\frac{1-1{,}1^{-10}}{12(1{,}1^{1/12}-1)}=4{,}4949.$$

Откуда

$$U=4{,}4949/4{,}0=1{,}124, \text{ т.е. } 12{,}4\%.$$

#7

Охарактеризованным выше классическим методам оценки эффективности инвестиций свойствен один общий недостаток — они предполагают известными используемые в расчете параметры будущих доходов, их размеры и время поступления. Но размер чистого дохода — величина, зависящая от целого ряда факторов, которая может быть определена более или менее точно лишь для простых ситуаций, сложившихся устойчивых производственных систем, рынков сбыта и т.д.

В условиях же воздействия НТР, колебаний цен и спроса на продукцию необходимые для расчетов параметры могут быть оценены лишь весьма приближенно, а подчас их определение просто невозможно. Второй элемент, который вносит свою лепту в неопределенность результатов оценки показателей эффективности — выбор процентной ставки для дисконтирования (нормы рентабельности, ставки сравнения). Как бы надежно ни была установлена эта ставка, вместе с ходом времени меняется экономическая конъюнктура, положение на кредитно-денежном и валютных рынках и т.д. Таким образом, та ставка, которая считалась в момент оценки эффективности приемлемой, может не оказаться таковой уже в следующем временном отрезке. Сказанное увеличивает условность получаемых оценок.

Сравнение показателей эффективности. Рассмотренные выше показатели эффективности объединяет общая черта — все они строятся на основе дисконтирования потока поступлений. Однако сущность, предпосылки и конкретные особенности методики их расчета, как было показано, различаются. В силу этого их применение к одним и тем же объектам может и дает разные результаты в отношении предпочтительности объектов инвестиций. Более того, сами эти результаты в определенной мере зависят от выбора важнейшего параметра анализа — принятой процентной ставки.

Пример 11.8. Для данных примера 11.1 получим следующие основные характеристики эффекта и эффективности при условии, что норма доходности принята на уровне 10 и 15%.

Показатели	$q = 10\%$		$q = 15\%$	
	А	Б	А	Б
n_y	2,2	3,5	2,2	3,5
$n_{ок}$	2,6	4,3	2,8	4,8
W	164,4	163,0	104,2	83,3
$q_в(\%)$	30	25	30	25
U	1,7	1,73	1,52	1,39

Если при оценивании исходить из процентной ставки $q = 10\%$, то согласно оценкам чистого приведенного дохода и рентабельности ни один из сравниваемых вариантов инвестиций не имеет особых преимуществ. Если же в качестве ориентира принять $q_в$, то явное предпочтение лежит на стороне варианта А. Аналогичный вывод можно сделать и на основе сравнения сроков окупаемости. Повышение процентной ставки до $q = 15\%$, как видим, существенно повлияло на чистый приведенный доход и показатель рентабельности, теперь преимущество варианта А, согласно найденным характеристикам, стало более очевидным.

#8

Неоднозначность получаемых при оценивании эффективности результатов в знвчительной мер объясняет, почему многие фирмы для повышения надежности при выборе варианта инвестиционного проекта ориентируются не на один, а на два и более измерителя. Для большей конкретности воспользуемся данными, полученными в 1983г. в ходе выборочного анкетного опроса 103 крупнейших нефтяных и газовых компнаий США (92% сбыта нефти, нефтепродуктов и газа).* Как показал опрос, 98% фирм применяли в качестве основного или дополнительного по крайней мере один из формальных измерителей, а многие — несколько. В приведенной ниже таблице содержатся данные о частоте применения тех или иных измерителей эффектвности.

	Измеритель	
	Основной	Вспомогательный
Внутренняя норма доходности	69	14
Чистый приведенный доход	32	39
Другие методы	12	21

Наибольшей популярностью у инвесторов пользуется внутренняя норма доходности. Однако для окончательного решения привлекаются и дополнительные критерии, в том числе, связанные с экологией и безопасностью персонала. Так, 65% опрошенных фирм одобряли проект для реализации и тогда, когда он не отвечал нормальным инвестиционным критериям, но устраивал их по другим соображаниям. Только 6 фирм заявили, что не существует нефинансовых критериев для принятия решений. Результативность формальных критериев тем выше, чем крупнее фирма. Так, мелкие фирмы (с ежегодными инвестициями менее 10 млн.долл.) приняли на этой основе проекты лишь в 25% случаев (правда, отмечается, что эффективность многих проектов, которые они осуществляют, настолько очевидна, что они не нуждаются в формальном инвестиционном анализе), крупные компании (с инвестициями более 500 млн. долл. в год) обосновывали свои решения на основе упомянутых выше измерителей в 92% случаев.

* *Boyle H.F., Sehenck G.K. Investment Analysis: US Oil and Gas Producers Score High in University Survey. 1985 Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, Dallas, 14-15 March 1985.*

Взаимосвязи показателей эффективности инвестиций. Показатели эффективности инвестиций, на которых мы останавливались выше, нацелены на характристику одного и того же процесса и в своем большинстве базируются на одной методике — приведении разновременных платежей к одному моменту времени. В силу сказанного можно ожидать, что эти измерители взаимосвязаны. Данные взаимосвязи нетрудно выявить аналитическим путем в случае, когда поток поступлений может быть представлен в виде той или иной финансовой ренты. Поэтому в приводимом ниже анализе мы ограничимся равномерным дискретным распределением поступлений. Для того, чтобы обнаружить интересующие нас взаимосвязи в общем виде, вероятно, этого достаточно.

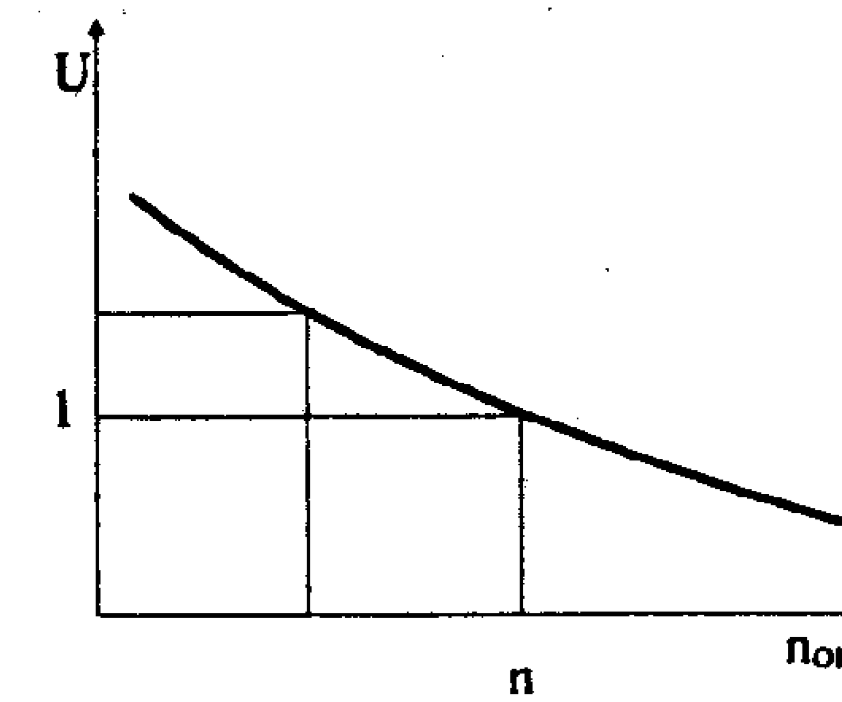

Рис. 11.4

Нетрудно показать, что

$$U = \frac{1-(1+q)^{-n}}{1-(1+q)^{-n_{ок}}}. \qquad (11.7)$$

Графическая иллюстация этой зависимости приведена на рис.11.4. Для того, чтобы доходность была не ниже q необходимо соблюдение очевидного условия $n_{ок}<n$. В этом случае $U>1$, как это показано на рисунке.

Что касается зависимости показателя рентабельности и внутренней нормы доходности, то

$$U = \frac{q_в}{q} \cdot \frac{1-(1+q)^{-n}}{1-(1+q_в)^{-n}}. \qquad (11.8)$$

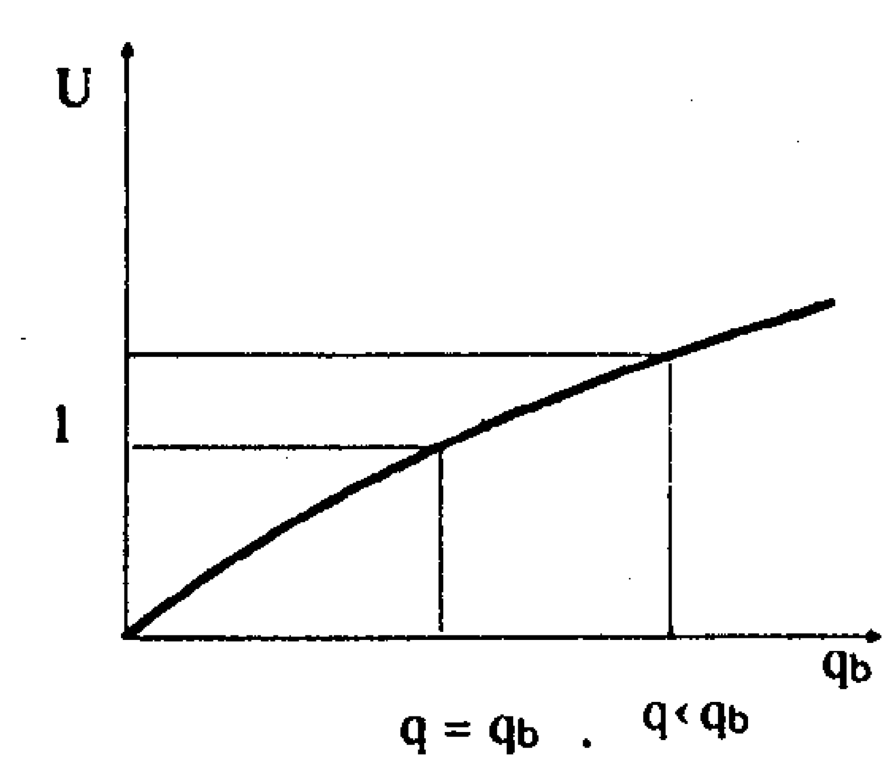

Рис. 11.5

Графическая иллюстрация этого соотношения показана на рис 11.5. Если $q_в<q$, то $U<1$, т.е. инвестиции нерентабельны. При $q_в>q$ рентабельность выше 1.

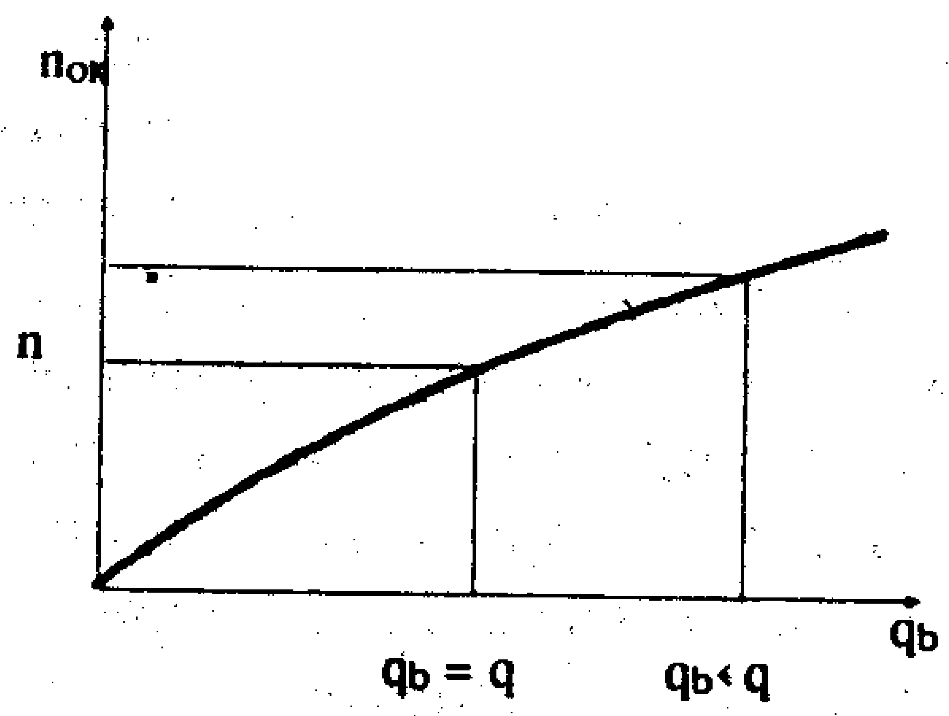

Рис. 11.6

Последняя из рассматриваемых зависимостей: срок окупаемости и внутренняя норма доходности. Находим

$$n_{ок}=\frac{\ln\left(1-\frac{q}{q_в}\cdot\left(1-(1+q_в)^{-n}\right)\right)}{\ln(1+q)}. \quad (11.9)$$

На рис. 11.6 приведены графики этой зависимости.

Все выявленные нами связи показателей эффективности капиталовложений зависят от двух параметров — q и n, все они существенно нелинейны. Отсюда равным сдвигам в значении одной характеристики соответствуют неравные изменения других.

11.4. Измерение эффективности сложных систем. Моделирование инвестиционного процесса

Рассмотренные выше методы измерения эффективности можно получить и для сложных инвестиционных процессов. В этом случае уместно прибегнуть к разработке специальной экономико-математической модели, ЭММ. Основные преимущества использования модели заключаются в одновременном учете в модели большого числа требований, условий и предположений , а также известная свобода в пересмотре этих условий в ходе работы с нею, непротиворечивости (совместности) получаемых по модели системы показателей, возможности получения вариантов поведения изучаемого явления для широкого диапазона и сочетаний исходных условий и предположений (например, вариантов экономического развития, состояния валютно-денежного рынка).

В настоящей работе мы ограничимся обсуждением проблемы построения ЭММ для анализа инвестиционного процесса. Особенностью такой модели является то, что в ней, как это было показано в предыдущих параграфах, охватываются два процесса — вложение средств и отдача от них. По существу полученные выше выражения для оценки показателей эффекта и эффективности представляли собой модели простых инвестиционных процессов. Будем считать сложными такие процессы, в которых последовательность вложений и (или) отдачи состоят из отдельных участков со специфическими распределениями. Разумеется, и для таких, относительно сложных систем, можно получить необходимые оценки эффекта и отдачи, последовательно находя соответствующие промежуточные характеристики и обобщая их в виде искомого конечного результата. Однако при таком расчете теряются преимущества модельного подхода, о которых говорилось выше. В частности, модель инвестиционного процесса дает возможность осуществить так называемый *анализ чувствительности* (sensivity analysis). Последний заключается в получении модельных оценок эффекта и эффективности для широкого диапазона возможных условий, в выявлении на этой базе наиболее важных (чувствительных) входных параметров модели. Наконец, анализ чувствительности позволяет выявить закономерности динамики результатов функционирования анализируемой системы в зависимости от изменения каждого из этих параметров. Таким образом, лицу, принимающему решение, предоставляется не единственная оценка эффективности, а развернутая картина (в виде таблиц и графиков) возможных значений эффективности для разнообразных возможных ситуаций.

Необходимость в такой детальной информации определяется прежде всего значительной условностью получаемых оценок эффекта и эффективности, о которой говорилось выше. В свою очередь условность результатов связана с использованием в расчете различных величин, значение которых относится к будущему. Достаточно напомнить, какую роль играет в этих расчетах процентная ставка. Большая условность кроется и в принятых гипотезах о распределении во времени поступлений доходов, издержек производства, ценах и т.д. Анализ чувствительности, не давая окончательно единственной оценки, позволяет установить некоторые ожидаемые интервалы искомых характеристик, тем самым снижается риск неправильного принятия решения. В упомянутом выше обзоре, охватившем нефтяные компании США, отмечается, что 40% из них применяют анализ чувствительности как средство сокращения риска.

Структура инвестиционного процесса. Основная задача при разработке модели, с помощью которой намереваются проанализировать долгосрочный инвестиционный проект, в том числе измерить его финансовую эффективность, сводится к описанию потока поступлений, который следует ожидать при его осуществлении. Первый шаг в этом направлении заключается в разработке структуры этого потока — расчленении на этапы, различающиеся своим содержанием и, следовательно, размерами в распределени доходов и затрат. Причем, поскольку модель должна давать оценки для различных возможных (ожидаемых) условий величин доходов и затрат, то они в свою очередь должны формироваться в модели в зависимости от внешних условий (напрмер, цен) и производственных параметров (объема производства, уровня затрат). Пусть, для большей определенности, речь идет о разработке предприятия по добыче каких-либо полезных ископаемых. Тогда процесс осуществления проекта, вероятно, можно расчленить на следующие этапы — изыскание, проектирование, строительство, монтаж и наладка оборудования. В свою очередь процесс отдачи разбивается на период освоения, нормальной эксплуатации, период истощения месторождения. Оба указанных процесса могут быть последовательными или в некоторой своей части совмещаться во времени.

Каждый из выделенных интервалов характеризуется специфическим уровнем доходов и расходов — в виде постоянных величин, распределений или в виде зависимостей от каких-либо внешних или производственных условий. Сформированные таким путем последовательности затрат и поступлений дают возможность определить члены потока для каждого момента или отрезка времени и, следовательно, рассчитать показатели эффективности (в первую очередь, чистый приведенный доход и внутреннюю норму доходности). Здесь надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Как уже отмечалось, подавляющее большинство исходных данных для расчета этих показателей являются оценочными, примерными. Особенно неустойчивыми являются данные об инвестициях в предприятие, в той или иной мере связанное с внешним рынком, экономикой других стран и т.д. Нельзя забывать, коль скоро речь идет о длительных процессах, и о возможности изменения технических параметров, например, при добыче полезных ископаемых, доступа к ним и т.д. Таким образом, зависимость потока поступлений, сформированного в модели, от множества разнообразных данных, относящихся к будущему, не позволяет получить однозначные ответы на все поставленные вопросы. Практически полезным выходом в подобной ситуации является, как известно, *сценарный подход*. Первоначально получают модельные результаты для некоторого базового сценария, в котором фиксируются наиболее вероятные условия для создания и функционирования производственной системы. Далее аналогичные оценки получают для пессимистичного и оптимистичного вариантов. Совокупность полученных расчетных оценок дает возможность более надежно представить себе финансовые последствия соответствующих инвестиций.

Последовательность разработки модели проиллюстрируем на условном примере создания и эксплуатации предприятия по добыче полезного ископаемого. Расходная часть проекта охватывает затраты на создание предприятия, эксплуатационные издержки, некоторые периодические выплаты типа ренты, налогов. Доходная часть предусматривает поступления от реализации полученной продукции. Все время создания и функционирования предприятия расчленяется на несколько интервалов, различающихся между собой по величине расходов и доходов.

Задача, следовательно, заключается в определении члена потока платежей (затрат и доходов) для каждого такого интервала. Соответствующие величины могут быть постоянными или переменными, дискретными или непрерывными в зависимости от конкретных условий. Например, такие расходы как изыскания и проектирование можно рассматривать как постоянные дискретные затраты. Строительство, приобретение и монтаж оборудования — как переменные затраты. Эксплуатационные расходы — как постоянные и т.д. Что касается доходов, то здесь можно выделить три периода — освоение, стабильная добыча, истощение месторождения. В каждом из них доходы могут рассматриваться как непрерывные величины. Причем, в первом они систематически растут, во втором — стабильные, в третьем — уменьшаются. Изменение отдачи часто связано с ожидаемым в будущем изменением цен на выпускаемую продукцию. Каждый из отдельных участков потока платежей может быть описан в виде постоянной или переменной ренты. Это дает основание для определения необходимых обобщающих характеристик эффективности инвестиционного процесса в целом. Если поступления или затраты непрерывные и равномерные, то расчет этих характеристик несколько упрощается путем трансформации непрерывного потока в дискретный. Для этого соответствующие суммарные величины относят к середине периодов.

Анализ чувствительности модели. О назначении этого анализа говорилось выше. Он состоит из следующих шагов:

- выбор основного ключевого показателя, т.е. параметра, относительно которого и производится оценка чувствительности. В рамках рассматриваемой модели такими показателями могут служить внутренняя норма доходности или чистый приведнный доход;

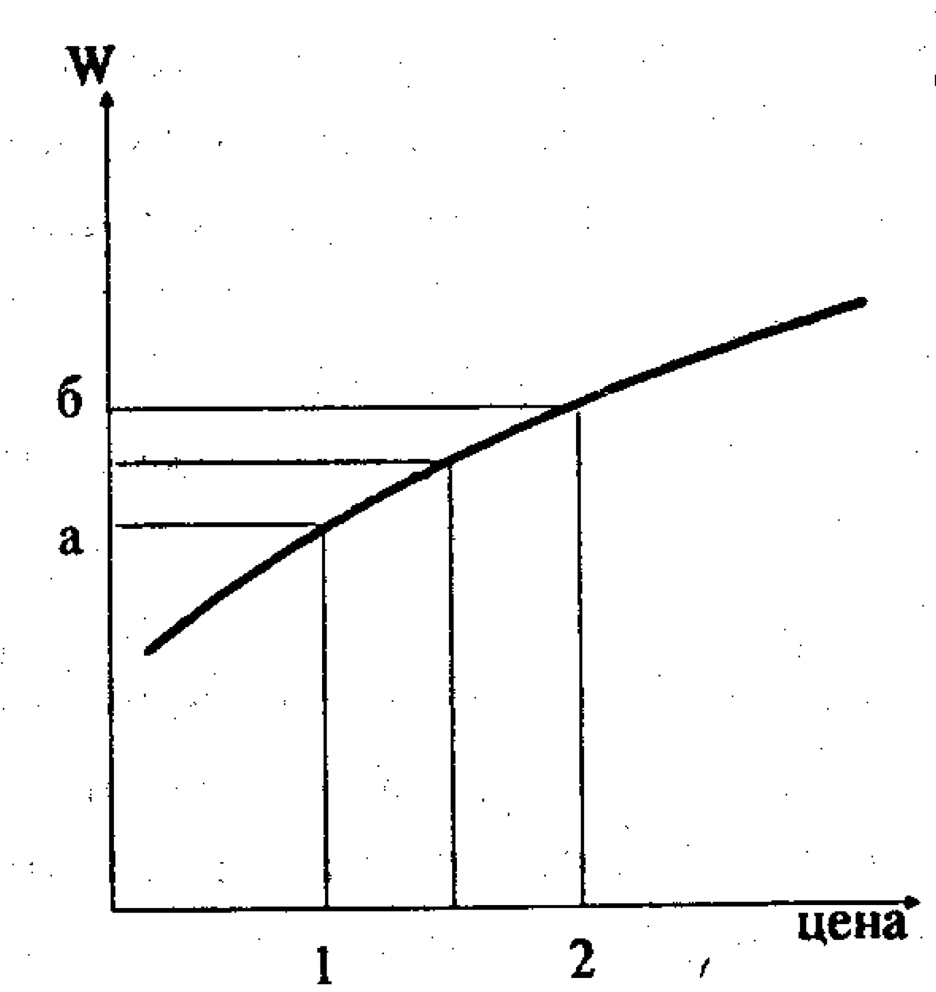

Рис. 11.7

- выбор факторов, влияние которых на ключевые показатели желательно выявить; в первую очередь это параметры, значения которых могут варьировать в относительно широких диапазонах, например, ожидаемые цены выпускаемой продукции, динамика производственных затрат, уровень инфляции;
- расчет значений ключевого показателя для некоторого диапазона параметров модели.

Результаты анализа удобно представить в виде графиков зависимости ключевого параметра от изменения одного из параметров для базового сценария. На рис.11.7 показана зависимость чистого приведенного дохода W от ожидаемой цены продукта. Области возможных уровней цены (1-2) соответствует диапазон $a-б$ показателей чистого приведенного дохода.

11.5 Аренда оборудования

Частным случаем производственного инвестирования является аренда оборудования. Необходимость в количественном финансовом анализе аренды оборудования возникает как для владельцев оборудования, так и арендатора. Для владельца важно правильное определение размера арендной платы и финансовой эффективности сдачи оборудования в аренду. Арендатор же, если есть альтернатива, должен решить вопрос: арендовать оборудование или купить его? Перечисленные задачи могут быть решены на основе чисто финансовых принципов, причем любой метод их решения базируется на концепции современной величины денежных потоков. Налоги и другие выплаты, если таковые могут быть, в приведенных ниже расчетах не учитываются, хотя в случае необходимости они могут быть включены в соответствующие потоки платежей. Договор аренды иногда предусматривает ремонт оборудования силами его владельца. За рубежом это обычная практика при сдаче в аренду ЭВМ и других видов сложной техники. Соответствующие издержки учитываются в арендной плате.

Определение размера платежей за аренду оборудования. Пусть оборудование со стоимостью P сдается в аренду на n лет. Остаточная его стоимость (в конце срока аренды) составит S. Размер разового арендного платежа, обеспечивающего заданный норматив доходности на вложенные в оборудование средства, для случая, когда аренда вносится в конце года, определяется по формуле

$$R=\frac{P-Sv^n}{a_{n;i}}, \qquad (11.10)$$

где R — размер годовой арендной платы; $a_{n;i}$ — коэффициент приведения годовой постоянной ренты, v — дисконтный множитель.

Величина арендной платы зависит здесь от стоимости оборудования, принятого норматива доходности i и от срока аренды.

Формула (11.10) предусматривает арендные платежи раз в конце года; если условия выплат другие, то применяются коэффициенты приведения соответствующих рент. Величина R характеризует размер

арендной платы, обеспечивающей только заданную доходность от сдачи оборудования в аренду. Учитываемый в расчете норматив доходности, естественно, должен быть больше нормы амортизации оборудования. Разность $i-a$ (где a — норма амортизации) приближенно характеризует реальную доходность арендной операции.

Пример 11.9. Оборудование, стоимость которого на момент предоставления в аренду равна 1 млн.руб., сдано на 4 года в аренду. Остаточная стоимость на момент окончания аренды оценивается в 400 тыс.руб. Допустим, что требуемая доходность от вложений в оборудование определена на уровне 15% годовых. Какова должна быть арендная плата, которая обеспечивает заданную доходность при условии, что арендные платежи вносятся: а) раз в конце года, б) раз в начале года, в) в начале каждого месяца?

Решение получим по формуле(11.10), числитель которой составит $1000-400\cdot 1{,}15^{-4} = 771{,}3$.

а) Находим $a_{4;15} = 2{,}85498$ откуда $R=\frac{771{,}3}{2{,}85498}=270{,}16$ тыс.руб.

Допустим теперь, что срок аренды при всех прочих условиях не 4 года, а скажем 8 лет и вдвое уменьшилась остаточная стоимость, тогда $a_{8;15}=4{,}487732$ и

$$R=\frac{1000-200\cdot 1{,}15^{-8}}{4{,}487732}=208{,}28 \text{ тыс.руб.},$$

т.е. увеличение срока привело к заметному сокращению годовых арендных платежей.

б) $a_{4;15}\cdot 1{,}15 = 3{,}28323$ и $R=\frac{771{,}3}{3{,}28323} = 234{,}92$ тыс.руб.

в) Находим:

$$a_{4;15}^{(12)}=\frac{1-1{,}15^{-4}}{12(1{,}15^{1/12}-1)}=3{,}04631;$$

$$a_{4;15}^{(12)}\cdot 1{,}15^{1/12}=3{,}08199; R=\frac{771{,}3}{3{,}08199}=250{,}26 \text{ тыс.руб.}$$

Таким образом,в начале каждого месяца выплачивается 250,26 : 12 = = 20,855 тыс.руб.

#9

Эффективность сдачи оборудования в аренду для владельца. Метод оценки эффективности заключается в расчете уровня доходности владельца от сдачи оборудования в аренду в виде годовой ставки сложных процентов. Первым шагом для этого является определение коэффициента приведения ренты по заданным показателям стоимости оборудования, размера арендных платежей и т.д. По найденному значению коэффициента приведения ренты определяется значение годовой процентной ставки i. Для случая, когда арендные платежи выплачиваются раз в конце года, величина коэффициента приведения находится следующим образом

$$a_{n;i}=\frac{P-Sv^n}{R}, \qquad (11.11)$$

где R — сумма арендного платежа без учета расходов на обслуживание и ремонт.

Пример 11.10. Пусть арендная плата за оборудование (пример 11.9) установлена в размере 25 тыс.руб., вносимых в начале каждого месяца. Какова действительная эффективность сделки, если норма амортизации равна 10%?

По условиям задачи определяем

$$a_{4;i}^{(12)}(1+i)^{1/12}=\frac{771,3}{12\cdot 25}=2,571.$$

На основе полученного значения коэффициента приведения ренты интерполяционным методом находим $i=27,8\%$. При принятой норме амортизации для данного вида оборудования (10%) действительная доходность от сдачи в аренду составляет 17,8%.

#10

Арендовать или покупать оборудование? Данная задача представляет собой специальный случай задачи измерения эффективности. Ее решение состоит в сравнении современных величин двух денежных потоков: платежей, связанных с приобретением оборудования, и платежей, определяемых договором аренды. Причем, если договор аренды предусматривает ремонт оборудования (и, следовательно, соответствующие затраты включены в арендную плату), то в поток платежей при покупке оборудования для сопоставимости итогов необходимо также включить расходы на ремонт, выполняемые владельцем. Применяемая для дисконирования ставка процентов должна быть равна рыночной стоимости кредита. Исключение составляет дисконтирование остаточной стоимости оборудования — здесь может применяться другая долгосрочная ставка (норматив рентабельности). Если платежи одинаковы по размеру и производятся через равные промежутки времени, то для определения современных величин потоков платежей следует воспользоваться формулами современных величин соответствующих финансовых рент (см.4.3). Из условия сравнения следует, что аренда в случае годовых платежей имеет финансовый смысл, если

$$R<\Pi/a_{n;i},$$

где Π — современная величина потоков платежей при покупке оборудования.

Пример 11.11. Имеется оборудование стоимостью 1 млн.руб., которое может быть предоставлено в аренду. Условия аренды: срок — 4 года, ежемесячная арендная плата — 21 тыс.руб., вносимая в начале месяца. Условия продажи: цена — 1 млн.руб., аванс — 200 тыс.руб., выплачиваемых в начале сделки, на остальную сумму открывается кредит на 5 лет из 6% годовых, погашение задолженности — в конце каждого года. Остаточная стоимость на конец периода погашения задолженности по оплате оборудования — 400 тыс.руб. В обоих вариантах ремонт осуществляется за счет пользователей оборудования, поэтому в сопоставительные расчеты эти расходы не включаются.

Поток платежей при аренде оборудования состоит из 48 арендных платежей по 21 тыс.руб. Поток платежей при покупке оборудования включает аванс и расходы по погашению задолженности. Кроме того, здесь учитывается остаточная стоимость оборудования. Годовая сумма расходов по погашению задолженности при покупке составит $R=\frac{800}{a_{5;6}}=\frac{800}{4,212364}=189,92$ тыс.руб.

Для дисконтирования сответствующего потока применим ставку, по которой можно разместить средства в данных конкретных условиях. Пусть она равна 8%. Коэффициент приведения ренты в этом случае составит $a_{5;8}$ = 3,99271. Тогда современная величина потока определяется как

$$\Pi_1=200+189,92\cdot 3,9927-400\cdot 1,08^{-4}=664,28 \text{ тыс.руб.}$$

В свою очередь современная стоимость аренды равна:

$$\Pi_2=Ra_{4;8}^{(12)}=21\cdot 12\cdot 3,43188=864,83 \text{ тыс.руб.}$$

Таким образом, аренда в этих условиях обойдется намного дороже. Аренда имела бы смысл для арендатора в том случае, когда ее оплата при всех прочих равных условиях была бы ниже, чем $R=\frac{664,28}{3,43188}=193,56$ тыс.руб. в год или 16,13 тыс.руб. в месяц.

#11

Таблица 1. Порядковые номера дней в году

день м-ца	янв	февр	март	апр	май	июнь	июль	авг	сент	окт	нояб	дек
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	[illegible]	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	[illegible]	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	330
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Таблица 2. Множители наращения (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов			
	5.00	5.50	6.00	6.50
1	1.050000000	1.055000000	1.060000000	1.065000000
2	1.102500000	1.113025000	1.123600000	1.134225000
3	1.157625000	1.174241375	1.191016000	1.207949625
4	1.215506250	1.238824650	1.262476960	1.286466350
5	1.276281562	1.306960006	1.338225577	1.370086663
6	1.340095640	1.378842806	1.418519112	1.459142296
7	1.407100422	1.454679161	1.503630259	1.553986545
8	1.477455443	1.534686515	1.593848074	1.654995671
9	1.551328216	1.619094273	1.689478959	1.762570389
10	1.628894626	1.708144458	1.790847696	1.877137465
11	1.710339358	1.802092403	1.898298558	1.999151400
12	1.795856326	1.901207485	2.012196471	2.129096241
13	1.885649142	2.005773897	2.132928260	2.267487497
14	1.979931599	2.116091461	2.260903955	2.414874184
15	2.078928179	2.232476492	2.396558193	2.571841006
16	2.182874588	2.355262699	2.540351684	2.739010672
17	2.292018317	2.484802147	2.692772785	2.917046365
18	2.406619233	2.621466265	2.854339152	3.106654379
19	2.526950195	2.765646910	3.025599502	3.308586914
20	2.653297705	2.917757490	3.207135472	3.523645063
21	2.785962590	3.078234152	3.399563600	3.752681992
22	2.925260719	3.247537031	3.603537416	3.996606322
23	3.071523755	3.426151567	3.819749661	4.256385733
24	3.225099943	3.614589903	4.048934641	4.533050805
25	3.386354940	3.813392348	4.291870719	4.827699108
26	3.555672687	4.023128927	4.549382962	5.141499550
27	3.733456322	4.244401018	4.822345940	5.475697021
28	3.920129138	4.477843074	5.111686697	5.831617327
29	4.116135595	4.724124444	5.418387898	6.210672453
30	4.321942375	4.983951288	5.743491172	6.614366163
31	4.538039493	5.258068609	6.088100643	7.044299963
32	4.764941468	5.547262382	6.453386681	7.502179461
33	5.003188541	5.852361813	6.840589882	7.989821126
34	5.253347969	6.174241713	7.251025275	8.509159499
35	5.516015367	6.513825007	7.686086792	9.062254867
36	5.791816135	6.872085383	8.147251999	9.651301433
37	6.081406942	7.250050079	8.636087119	10.27863602
38	6.385477289	7.648802833	9.154252346	10.94674736
39	6.704751154	8.069486989	9.703507487	11.65828594
40	7.039988711	8.513308774	10.28571793	12.41607453
41	7.391988147	8.981540756	10.90286101	13.22311937
42	7.761587554	9.475525498	11.55703267	14.08262213
43	8.149666932	9.996679400	12.25045463	14.99799257
44	8.557150279	10.54649676	12.98548191	15.97286209
45	8.985007793	11.12655409	13.76461082	17.01109813
46	9.434258182	11.73851456	14.59048747	18.11681950
47	9.905971092	12.38413286	15.46591672	19.29441277
48	10.40126964	13.06526017	16.39387172	20.54854960
49	10.92133312	13.78384948	17.37750403	21.88420533
50	11.46739978	14.54196120	18.42015427	23.30667867
60	18.67918589	24.83977044	32.98769085	43.74983974
70	30.42642553	42.42991623	59.07593017	82.12446327
80	49.56144106	72.47642628	105.7959934	154.1589068
90	80.73036504	123.8002059	189.4645112	289.3774596
100	131.5012578	211.4686356	339.3020835	543.2012710

Множители наращения (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 7.00	7.50	8.00	8.50
1	1 070000000	1.075000000	1.080000000	1.085000000
2	1.144900000	1.155625000	1.166400000	1.177225000
3	1.225043000	1.242296875	1.259712000	1.277289125
4	1.310796010	1.335469140	1.360488960	1.385858700
5	1.402551730	1.435629326	1.469328076	1.503656690
6	1.500730351	1.543301525	1.586874322	1.631467508
7	1.605781476	1.659049140	1.713824268	1.770142247
8	1.718186179	1.783477825	1.850930210	1.920604338
9	1.838459212	1.917238662	1.999004627	2.083855706
10	1.967151357	2.061031562	2.158924997	2.260983441
11	2.104851952	2.215608929	2.331638997	2.453167034
12	2.252191589	2.381779599	2.518170116	2.661686232
13	2.409845000	2.560413069	2.719623726	2.887929562
14	2.578534150	2.752444049	2.937193624	3.133403575
15	2.759031540	2.958877352	3.172169114	3.399742878
16	2.952163748	3.180793154	3.425942643	3.688721023
17	3.158815211	3.419352640	3.700018054	4.002262310
18	3.379932275	3.675804088	3.996019499	4.342454607
19	3.616527535	3.951489395	4.315701059	4.711563248
20	3.869684462	4.247851100	4.660957143	5.112046124
21	4.140562374	4.566439932	5.033833715	5.546570045
22	4.430401741	4.908922927	5.436540412	6.018028499
23	4.740529862	5.277092147	5.871463645	6.529560921
24	5.072366953	5.672874058	6.341180737	7.084573600
25	5.427432640	6.098339612	6.848475196	7.686762356
26	5.807352924	6.555715083	7.396353211	8.340137156
27	6.213867629	7.047393715	7.988061468	9.049048814
28	6.648838363	7.575948243	8.627106386	9.818217963
29	7.114257049	8.144144362	9.317274897	10.65276649
30	7.612255042	8.754955189	10.06265688	11.55825164
31	8.145112895	9.411576828	10.86766944	12.54070303
32	8.715270798	10.11744509	11.73708299	13.60666279
33	9.325339754	10.87625347	12.67604963	14.76322912
34	9.978113536	11.69197248	13.69013360	16.01810360
35	10.67658148	12.56887041	14.78534429	17.37964240
36	11.42394218	13.51153570	15.96817183	18.85691201
37	12.22361814	14.52490087	17.24562558	20.45974953
38	13.07927141	15.61426844	18.62527563	22.19882824
39	13.99482041	16.78533857	20.11529768	24.08572864
40	14.97445783	18.04423897	21.72452149	26.13301558
41	16.02266988	19.39755689	23.46248321	28.35432190
42	17.14425678	20.85237366	25.33948187	30.76443926
43	18.34435475	22.41630168	27.36664042	33.37941660
44	19.62845958	24.09752431	29.55597165	36.21666701
45	21.00245175	25.90483863	31.92044939	39.29508371
46	22.47262338	27.84770153	34.47408534	42.63516582
47	24.04570701	29.93627914	37.23201216	46.25915492
48	25.72890650	32.18150008	40.21057314	50.19118309
49	27.52992996	34.59511258	43.42741899	54.45743365
50	29.45702506	37.18974603	46.90161251	59.08631551
60	57.94642683	76.64924036	101.2570636	133.5931810
70	113.9893922	157.9765036	218.6064059	302.0519702
80	224.2343875	325.5945600	471.9548342	682.9345033
90	441.1029798	671.0606646	1018.915089	1544.103604
100	867.7163255	1383.077210	2199.761256	3491.192681

Число Пер-в	Ставка процентов 9.00	9.50	10.0	10.5
1	1.090000000	1.095000000	1.100000000	1.105000000
2	1.188100000	1.199025000	1.210000000	1.221025000
3	1.295029000	1.312932375	1.331000000	1.349232625
4	1.411581610	1.437660950	1.464100000	1.490902050
5	1.538623954	1.574238740	1.610510000	1.647446765
6	1.677100110	1.723791421	1.771561000	1.820428676
7	1.828039120	1.887551606	1.948717100	2.011573687
8	1.992562641	2.066869008	2.143588810	2.222788924
9	2.171893279	2.263221564	2.357947691	2.456181761
10	2.367363674	2.478227613	2.593742460	2.714080846
11	2.580426405	2.713659236	2.853116706	2.999059335
12	2.812664781	2.971456864	3.138428376	3.313960565
13	3.065804612	3.253745266	3.452271214	3.661926425
14	3.341727027	3.562851066	3.797498335	4.046428699
15	3.642482459	3.901321917	4.177248169	4.471303713
16	3.970305881	4.271947500	4.594972986	4.940790603
17	4.327633410	4.677782512	5.054470285	5.459573616
18	4.717120417	5.122171851	5.559917313	6.032828846
19	5.141661254	5.608778177	6.115909044	6.666275875
20	5.604410767	6.141612104	6.727499949	7.366234841
21	6.108807736	6.725065253	7.400249944	8.139689500
22	6.658600433	7.363946453	8.140274938	8.994356897
23	7.257874472	8.063521366	8.954302432	9.938764372
24	7.911083174	8.829555895	9.849732675	10.98233463
25	8.623080660	9.668363705	10.83470594	12.13547976
26	9.399157919	10.58685825	11.91817653	13.40970514
27	10.24508213	11.59260979	13.10999419	14.81772418
28	11.16713952	12.69390772	14.42099361	16.37358522
29	12.17218208	13.89982895	15.86309297	18.09281167
30	13.26767846	15.22031270	17.44940226	19.99255689
31	14.46176953	16.66624241	19.19434249	22.09177537
32	15.76332878	18.24953544	21.11377674	24.41141178
33	17.18202838	19.98324131	23.22515442	26.97461002
34	18.72841093	21.88164923	25.54766986	29.80694407
35	20.41396791	23.96040591	28.10243684	32.93667320
36	22.25122503	26.23664447	30.91268053	36.39502388
37	24.25383528	28.72912570	34.00394858	40.21650139
38	26.43668046	31.45839264	37.40434344	44.43923404
39	28.81598170	34.44693994	41.14477779	49.10535361
40	31.40942005	37.71939923	45.25925556	54.26141574
41	34.23626785	41.30274216	49.78518112	59.95886439
42	37.31753196	45.22650266	54.76369923	66.25454516
43	40.67610984	49.52302042	60.24006916	73.21127240
44	44.33695972	54.22770736	66.26407607	80.89845600
45	48.32728610	59.37933956	72.89048368	89.39279388
46	52.67674185	65.02037682	80.17953205	98.77903724
47	57.41764862	71.19731261	88.19748526	109.1508361
48	62.58523699	77.96105731	97.01723378	120.6116739
49	68.21790832	85.36735776	106.7189571	133.2758997
50	74.35752007	93.47725675	117.3908528	147.2698691
60	176.0312919	231.6579189	304.4816395	399.7023312
70	416.7300861	574.1010515	789.7469568	1084.824441
80	986.5516681	1422.753078	2048.400214	2944.301238
90	2335.526582	3525.905966	5313.022612	7991.071598
100	5529.040791	8737.997529	13780.61234	21688.41437

Число Пер-в	Ставка процентов 11.0	11.5	12.0	12.5
1	1.110000000	1.115000000	1.120000000	1.125000000
2	1.232100000	1.243225000	1.254400000	1.265625000
3	1.367631000	1.386195875	1.404928000	1.423828125
4	1.518070410	1.545608400	1.573519360	1.601806640
5	1.685058155	1.723353366	1.762341683	1.802032470
6	1.870414552	1.921539003	1.973822685	2.027286529
7	2.076160152	2.142515989	2.210681407	2.280697345
8	2.304537769	2.388905328	2.475963176	2.565784514
9	2.558036924	2.663629440	2.773078757	2.886507578
10	2.839420986	2.969946826	3.105848208	3.247321025
11	3.151757294	3.311490711	3.478549993	3.653236153
12	3.498450597	3.692312143	3.895975992	4.109890672
13	3.883280162	4.116928039	4.363493111	4.623627007
14	4.310440980	4.590374764	4.887112285	5.201580382
15	4.784589488	5.118267862	5.473565759	5.851777930
16	5.310894332	5.706868666	6.130393650	6.583250172
17	5.895092708	6.363158563	6.866040888	7.406156443
18	6.543552906	7.094921797	7.689965795	8.331925999
19	7.263343726	7.910837804	8.612761690	9.373416748
20	8.062311536	8.820584152	9.646293093	10.54509384
21	8.949165805	9.834951329	10.80384826	11.86323057
22	9.933574043	10.96597073	12.10031005	13.34613439
23	11.02626718	12.22705736	13.55234726	15.01440119
24	12.23915657	13.63316896	15.17862893	16.89120134
25	13.58546380	15.20098339	17.00006440	19.00260151
26	15.07986482	16.94909648	19.04007213	21.37792670
27	16.73864995	18.89824258	21.32488079	24.05016753
28	18.57990144	21.07154047	23.88386648	27.05643847
29	20.62369060	23.49476763	26.74993046	30.43849328
30	22.89229657	26.19666591	29.95992212	34.24330495
31	25.41044919	29.20928249	33.55511277	38.52371806
32	28.20559860	32.56834997	37.58172630	43.33918282
33	31.30821445	36.31371022	42.09153346	48.75658068
34	34.75211804	40.48978690	47.14251748	54.85115326
35	38.57485102	45.14611239	52.79961958	61.70754742
36	42.81808464	50.33791531	59.13557393	69.42099085
37	47.52807395	56.12677558	66.23184280	78.09861470
38	52.75616208	62.58135477	74.17966393	87.86094154
39	58.55933991	69.77821057	83.08122361	98.84355924
40	65.00086730	77.80270478	93.05097044	111.1990041
41	72.15096271	86.75001583	104.2170869	125.0988796
42	80.08756860	96.72626765	116.7231373	140.7362396
43	88.89720115	107.8497884	130.7299138	158.3282695
44	98.67589328	120.2525141	146.4175034	178.1193032
45	109.5302415	134.0815532	163.9876038	200.3842161
46	121.5785681	149.5009318	183.6661163	225.4322432
47	134.9522106	166.6935390	205.7060503	253.6112736
48	149.7969537	185.8632960	230.3907763	285.3126828
49	166.2746186	207.2375750	258.0376695	320.9767681
50	184.5648267	231.0698961	289.0021898	361.0988641
60	524.0572423	686.2653048	897.5969335	1172.603933
70	1488.019131	2038.171464	2787.799827	3807.821409
80	4225.112750	6053.260872	8658.483100	12365.21852
90	11996.87381	17977.86291	26891.93422	40153.83409
100	34064.17527	53393.29691	83522.26573	130392.3897

Число Пер-в	Ставка процентов 13.0	13.5	14.0	14.5
1	1.130000000	1.135000000	1.140000000	1.145000000
2	1.276900000	1.288225000	1.299600000	1.311025000
3	1.442897000	1.462135375	1.481544000	1.501123625
4	1.630473610	1.659523650	1.688960160	1.718786550
5	1.842435179	1.883559343	1.925414582	1.968010600
6	2.081951752	2.137839854	2.194972624	2.253372137
7	2.352605480	2.426448235	2.502268791	2.580111097
8	2.658444192	2.754018747	2.852586422	2.954227206
9	3.004041938	3.125811277	3.251948521	3.382590151
10	3.394567390	3.547795800	3.707221314	3.873065723
11	3.835861150	4.026748233	4.226232298	4.434660253
12	4.334523100	4.570359244	4.817904819	5.077685990
13	4.898011103	5.187357743	5.492411494	5.813950458
14	5.534752546	5.887651038	6.261349103	6.656973275
15	6.254270377	6.682483928	7.137937978	7.622234400
16	7.067325526	7.584619258	8.137249295	8.727458388
17	7.986077845	8.608542858	9.276464196	9.992939854
18	9.024267965	9.770696144	10.57516918	11.44191613
19	10.19742280	11.08974012	12.05569287	13.10099397
20	11.52308776	12.58685504	13.74348987	15.00063809
21	13.02108917	14.28608047	15.66757845	17.17573062
22	14.71383076	16.21470133	17.86103943	19.66621156
23	16.62662876	18.40368601	20.36158495	22.51781224
24	18.78809050	20.88818362	23.21220685	25.78289501
25	21.23054227	23.70808841	26.46191581	29.52141479
26	23.99051276	26.90868035	30.16658402	33.80201993
27	27.10927942	30.54135220	34.38990579	38.70331282
28	30.63348575	34.66443474	39.20449260	44.31529318
29	34.61583890	39.34413343	44.69312156	50.74101070
30	39.11589795	44.65559145	50.95015858	58.09845725
31	44.20096469	50.68409630	58.08318078	66.52273355
32	49.94709010	57.52644930	66.21482609	76.16852992
33	56.44021181	65.29251995	75.48490175	87.21296675
34	63.77743935	74.10701015	86.05278799	99.85884693
35	72.06850646	84.11145652	98.10017831	114.3383797
36	81.43741231	95.46650315	111.8342032	130.9174448
37	92.02427591	108.3544810	127.4909917	149.9004743
38	103.9874317	122.9823360	145.3397305	171.6360430
39	117.5057979	139.5849513	165.6872928	196.5232693
40	132.7815516	158.4289198	188.8835138	225.0191433
41	150.0431533	179.8168240	215.3272058	257.6469191
42	169.5487632	204.0920952	245.4730146	295.0057224
43	191.5901025	231.6445280	279.8392366	337.7815522
44	216.4968158	262.9165393	319.0167298	386.7598772
45	244.6414019	298.4102722	363.6790719	442.8400594
46	276.4447841	338.6956589	414.5941420	507.0518681
47	312.3826060	384.4195729	472.6373219	580.5743889
48	352.9923448	436.3162152	538.8065470	664.7576753
49	398.8813497	495.2189043	614.2394635	761.1475383
50	450.7359251	562.0734563	700.2329885	871.5139313
60	1530.053473	1994.121848	2595.918659	3375.430735
70	5193.869624	7074.737118	9623.644985	13073.26508
80	17630.94045	25099.72263	35676.98181	50633.61488
90	59849.41552	89048.69055	132262.4673	196107.3182
100	203162.8742	315926.5703	490326.2381	759536.5325

Множители наращения (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 15.0	15.5	16.0	16.5
1	1.150000000	1.155000000	1.160000000	1.165000000
2	1.322500000	1.334025000	1.345600000	1.357225000
3	1.520875000	1.540798875	1.560896000	1.581167125
4	1.749006250	1.779622700	1.810639360	1.842059700
5	2.011357187	2.055464219	2.100341657	2.145999551
6	2.313060765	2.374061173	2.436396322	2.500089477
7	2.660019880	2.742040655	2.826219734	2.912604240
8	3.059022862	3.167056956	3.278414892	3.393183940
9	3.517876292	3.657950784	3.802961274	3.953059290
10	4.045557735	4.224933156	4.411435078	4.605314073
11	4.652391396	4.879797795	5.117264691	5.365190896
12	5.350250105	5.636166454	5.936027041	6.250447394
13	6.152787621	6.509772254	6.885791368	7.281771214
14	7.075705764	7.518786954	7.987517987	8.483263464
15	8.137061629	8.684198931	9.265520865	9.883001935
16	9.357620873	10.03024976	10.74800420	11.51369725
17	10.76126400	11.58493848	12.46768487	13.41345730
18	12.37545360	13.38060394	14.46251445	15.62667775
19	14.23177164	15.45459755	16.77651677	18.20507958
20	16.36653739	17.85006017	19.46075945	21.20891771
21	18.82151800	20.61681950	22.57448096	24.70838914
22	21.64474570	23.81242652	26.18639792	28.78527335
23	24.89145755	27.50335264	30.37622158	33.53484345
24	28.62517619	31.76637229	35.23641704	39.06809262
25	32.91895262	36.69016000	40.87424376	45.51432790
26	37.85679551	42.37713480	47.41412277	53.02419201
27	43.53531484	48.94559070	55.00038241	61.77318369
28	50.06561206	56.53215725	63.80044360	71.96575900
29	57.57545387	65.29464163	74.00851458	83.84010924
30	66.21177195	75.41531108	85.84987691	97.67372726
31	76.14353775	87.10468430	99.58585721	113.7898922
32	87.56506841	100.6059103	115.5195943	132.5652244
33	100.6998286	116.1998264	134.0027294	154.4384865
34	115.8048029	134.2107995	155.4431661	179.9208368
35	133.1755234	155.0134735	180.3140727	209.6077748
36	153.1518519	179.0405619	209.1643244	244.1930577
37	176.1246297	206.7918490	242.6306163	284.4849122
38	202.5433241	238.8445856	281.4515149	331.4249227
39	232.9248228	275.8654963	326.4837573	386.1100350
40	267.8635462	318.6246483	378.7211585	449.8181908
41	308.0430781	368.0114688	439.3165438	524.0381923
42	354.2495399	425.0532464	509.6071909	610.5044940
43	407.3869709	490.9364996	591.1443414	711.2377355
44	468.4950165	567.0316571	685.7274360	828.5919619
45	538.7692690	654.9215640	795.4438258	965.3096356
46	619.5846593	756.4344064	922.7148379	1124.585725
47	712.5223582	873.6817394	1070.349212	1310.142370
48	819.4007120	1009.102409	1241.605086	1526.315861
49	942.3108188	1165.513282	1440.261899	1778.157978
50	1083.657441	1346.167841	1670.703803	2071.554044
60	4383.998746	5687.469146	7370.201365	9540.156997
70	17735.72004	24029.17697	32513.16484	43935.41928
80	71750.87940	101521.6665	143429.7159	202336.4048
90	290272.3252	428922.2549	632730.8800	931822.6926
100	1174313.450	1812167.856	2791251.199	4291336.161

Таблица 3. Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 5.00	5.50	6.00	6.50
1	0.952380952	0.947867298	0.943396226	0.938967136
2	0.907029478	0.898452415	0.889996440	0.881659282
3	0.863837598	0.851613664	0.839619283	0.827849091
4	0.822702474	0.807216743	0.792093663	0.777323090
5	0.783526166	0.765134353	0.747258172	0.729880836
6	0.746215396	0.725245833	0.704960540	0.685334118
7	0.710681330	0.687436808	0.665057113	0.643506214
8	0.676839362	0.651598870	0.627412371	0.604231187
9	0.644608916	0.617629261	0.591898463	0.567353227
10	0.613913253	0.585430579	0.558394776	0.532726035
11	0.584679289	0.554910501	0.526787525	0.500212239
12	0.556837418	0.525981518	0.496969363	0.469682854
13	0.530321350	0.498560680	0.468839022	0.441016764
14	0.505067953	0.472569365	0.442300964	0.414100248
15	0.481017098	0.447933048	0.417265060	0.388826524
16	0.458111522	0.424581088	0.393646283	0.365095328
17	0.436296687	0.402446529	0.371364418	0.342812514
18	0.415520654	0.381465904	0.350343791	0.321889685
19	0.395733957	0.361579056	0.330513010	0.302243835
20	0.376889482	0.342728963	0.311804726	0.283797028
21	0.358942364	0.324861576	0.294155402	0.266476083
22	0.341849871	0.307925665	0.277505096	0.250212284
23	0.325571305	0.291872668	0.261797261	0.234941112
24	0.310067910	0.276656557	0.246978548	0.220601983
25	0.295302771	0.262233703	0.232998630	0.207138012
26	0.281240734	0.248562752	0.219810028	0.194495786
27	0.267848319	0.235604504	0.207367951	0.182625151
28	0.255093637	0.223321805	0.195630143	0.171479015
29	0.242946321	0.211679436	0.184556738	0.161013160
30	0.231377448	0.200644015	0.174110130	0.151186066
31	0.220359474	0.190183901	0.164254840	0.141958747
32	0.209866166	0.180269100	0.154957396	0.133294598
33	0.199872539	0.170871185	0.146186223	0.125159247
34	0.190354799	0.161963208	0.137911531	0.117520420
35	0.181290285	0.153519629	0.130105218	0.110347812
36	0.172657414	0.145516236	0.122740771	0.103612969
37	0.164435632	0.137930081	0.115793181	0.097289173
38	0.156605364	0.130739413	0.109238850	0.091351336
39	0.149147966	0.123923615	0.103055518	0.085775902
40	0.142045682	0.117463142	0.097222187	0.080540753
41	0.135281602	0.111339471	0.091719045	0.075625120
42	0.128839621	0.105535043	0.086527400	0.071009503
43	0.122704401	0.100033217	0.081629623	0.066675589
44	0.116861334	0.094818215	0.077009078	0.062606187
45	0.111296508	0.089875085	0.072650074	0.058785152
46	0.105996675	0.085189654	0.068537805	0.055197326
47	0.100949214	0.080748487	0.064658307	0.051828475
48	0.096142108	0.076538850	0.060998403	0.048665235
49	0.091563913	0.072548673	0.057545663	0.045695056
50	0.087203726	0.068766515	0.054288361	0.042906156
60	0.053535523	0.040258020	0.030314337	0.022857226
70	0.032866167	0.023568276	0.016927367	0.012176639
80	0.020176975	0.013797589	0.009452153	0.006486812
90	0.012386912	0.008077530	0.005278033	0.003455694
100	0.007604490	0.004728833	0.002947226	0.001840938

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов			
	7.00	7.50	8.00	8.50
1	0.934579439	0.930232558	0.925925925	0.921658986
2	0.873438728	0.865332612	0.857338820	0.849455286
3	0.816297876	0.804960569	0.793832241	0.782908098
4	0.762895212	0.748800529	0.735029852	0.721574284
5	0.712986179	0.696558632	0.680583197	0.665045423
6	0.666342223	0.647961518	0.630169626	0.612945090
7	0.622749741	0.602754900	0.583490395	0.564926350
8	0.582009104	0.560702233	0.540268884	0.520669447
9	0.543933742	0.521583472	0.500248967	0.479879675
10	0.508349292	0.485193928	0.463193488	0.442285415
11	0.475092796	0.451343189	0.428882859	0.407636327
12	0.444011959	0.419854129	0.397113758	0.375701684
13	0.414964447	0.390561980	0.367697924	0.346268833
14	0.387817241	0.363313470	0.340461041	0.319141781
15	0.362446019	0.337966019	0.315241704	0.294139891
16	0.338734597	0.314386994	0.291890467	0.271096673
17	0.316574390	0.292453018	0.270268951	0.249858685
18	0.295863916	0.272049319	0.250249029	0.230284502
19	0.276508333	0.253069134	0.231712064	0.212243781
20	0.258419002	0.235413148	0.214548207	0.195616388
21	0.241513086	0.218988974	0.198655747	0.180291602
22	0.225713165	0.203710674	0.183940507	0.166167375
23	0.210946883	0.189498301	0.170315284	0.153149654
24	0.197146619	0.176277489	0.157699337	0.141151755
25	0.184249177	0.163979060	0.146017904	0.130093783
26	0.172195493	0.152538660	0.135201763	0.119902104
27	0.160930367	0.141896428	0.125186818	0.110508852
28	0.150402212	0.131996677	0.115913720	0.101851476
29	0.140562815	0.122787607	0.107327519	0.093872328
30	0.131367117	0.114221030	0.099377332	0.086518275
31	0.122773006	0.106252121	0.092016048	0.079740346
32	0.114741127	0.098839182	0.085200045	0.073493406
33	0.107234698	0.091943425	0.078888930	0.067735858
34	0.100219344	0.085528767	0.073045306	0.062429362
35	0.093662938	0.079561644	0.067634542	0.057538583
36	0.087535456	0.074010832	0.062624576	0.053030952
37	0.081808838	0.068847285	0.057985719	0.048876453
38	0.076456858	0.064043986	0.053690480	0.045047422
39	0.071455007	0.059575801	0.049713407	0.041518361
40	0.066780381	0.055419350	0.046030933	0.038265771
41	0.062411571	0.051552883	0.042621234	0.035267992
42	0.058328571	0.047956171	0.039464106	0.032505061
43	0.054512683	0.044610391	0.036540838	0.029958582
44	0.050946432	0.041498038	0.033834110	0.027611596
45	0.047613488	0.038602826	0.031327879	0.025448476
46	0.044498587	0.035909606	0.029007296	0.023454816
47	0.041587465	0.033404284	0.026858607	0.021617342
48	0.038866789	0.031073753	0.024869080	0.019923818
49	0.036324102	0.028905817	0.023026926	0.018362965
50	0.033947759	0.026889132	0.021321228	0.016924392
60	0.017257319	0.013046443	0.009875854	0.007485412
70	0.008772746	0.006330055	0.004574431	0.003310688
80	0.004459619	0.003071304	0.002118846	0.001464269
90	0.002267044	0.001490178	0.000981436	0.000647624
100	0.001152450	0.000723025	0.000454594	0.000286435

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов			
	9.00	9.50	10.0	10.5
1	0.917431192	0.913242009	0.909090909	0.904977375
2	0.841679993	0.834010967	0.826446280	0.818984050
3	0.772183480	0.761653851	0.751314800	0.741162036
4	0.708425211	0.695574293	0.683013455	0.670734874
5	0.649931386	0.635227665	0.620921323	0.606999886
6	0.596267326	0.580116589	0.564473930	0.549321164
7	0.547034244	0.529786839	0.513158118	0.497123225
8	0.501866279	0.483823597	0.466507380	0.449885272
9	0.460427779	0.441848034	0.424097618	0.407135992
10	0.422410806	0.403514186	0.385543289	0.368448862
11	0.387532850	0.368506106	0.350493899	0.333437884
12	0.355534725	0.336535257	0.318630817	0.301753741
13	0.326178646	0.307338134	0.289664379	0.273080309
14	0.299246465	0.280674095	0.263331254	0.247131501
15	0.274538041	0.256323374	0.239392049	0.223648417
16	0.251869762	0.234085273	0.217629135	0.202396757
17	0.231073176	0.213776505	0.197844668	0.183164486
18	0.211993740	0.195229685	0.179858789	0.165759716
19	0.194489669	0.178291950	0.163507990	0.150008793
20	0.178430889	0.162823698	0.148643628	0.135754564
21	0.163698064	0.148697441	0.135130570	0.122854809
22	0.150181710	0.135796750	0.122845973	0.111180822
23	0.137781385	0.124015297	0.111678157	0.100616129
24	0.126404940	0.113255979	0.101525597	0.091055320
25	0.115967835	0.103430118	0.092295998	0.082403005
26	0.106392509	0.094456728	0.083905452	0.074572855
27	0.097607807	0.086261852	0.076277684	0.067486746
28	0.089548446	0.078777947	0.069343349	0.061073979
29	0.082154538	0.071943331	0.063039408	0.055270569
30	0.075371136	0.065701672	0.057308553	0.050018614
31	0.069147831	0.060001527	0.052098684	0.045265714
32	0.063438377	0.054795915	0.047362440	0.040964447
33	0.058200346	0.050041931	0.043056764	0.037071898
34	0.053394813	0.045700394	0.039142513	0.033549229
35	0.048986066	0.041735519	0.035584102	0.030361293
36	0.044941345	0.038114630	0.032349184	0.027476283
37	0.041230592	0.034807881	0.029408349	0.024865415
38	0.037826231	0.031788019	0.026734863	0.022502638
39	0.034702964	0.029030154	0.024304420	0.020364378
40	0.031837582	0.026511556	0.022094928	0.018429301
41	0.029208791	0.024211467	0.020086298	0.016678101
42	0.026797056	0.022110929	0.018260271	0.015093304
43	0.024584455	0.020192629	0.016600246	0.013659098
44	0.022554546	0.018440757	0.015091133	0.012361175
45	0.020692244	0.016840874	0.013719212	0.011186584
46	0.018983710	0.015379793	0.012472010	0.010123605
47	0.017416247	0.014045473	0.011338191	0.009161633
48	0.015978209	0.012826916	0.010307447	0.008291071
49	0.014658907	0.011714079	0.009370406	0.007503232
50	0.013448538	0.010697789	0.008518551	0.006790255
60	0.005680808	0.004316709	0.003284270	0.002501861
70	0.002399634	0.001741853	0.001266228	0.000921808
80	0.001013631	0.000702862	0.000488185	0.000339639
90	0.000428168	0.000283615	0.000188216	0.000125139
100	0.000180863	0.000114442	0.000072565	0.000046107

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 11.0	11.5	12.0	12.5
1	0.900900900	0.896860986	0.892857142	0.888888888
2	0.811622433	0.804359629	0.797193877	0.790123456
3	0.731191381	0.721398770	0.711780247	0.702331961
4	0.658730974	0.646994413	0.635518078	0.624295076
5	0.593451328	0.580264047	0.567426855	0.554928957
6	0.534640836	0.520416186	0.506631121	0.493270184
7	0.481658410	0.466740974	0.452349215	0.438462386
8	0.433926496	0.418601770	0.403883227	0.389744343
9	0.390924771	0.375427596	0.360610024	0.346439416
10	0.352184478	0.336706364	0.321973236	0.307946147
11	0.317283314	0.301978802	0.287476104	0.273729909
12	0.285840823	0.270833006	0.256675092	0.243315474
13	0.257514255	0.242899557	0.229174190	0.216280421
14	0.231994824	0.217847136	0.204619812	0.192249263
15	0.209004346	0.195378598	0.182696261	0.170888234
16	0.188292204	0.175227442	0.163121661	0.151900653
17	0.169632616	0.157154656	0.145644340	0.135022802
18	0.152822176	0.140945880	0.130039590	0.120020269
19	0.137677636	0.126408861	0.116106776	0.106684683
20	0.124033907	0.113371176	0.103666765	0.094830829
21	0.111742258	0.101678184	0.092559611	0.084294070
22	0.100668701	0.091191197	0.082642510	0.074928063
23	0.090692523	0.081785827	0.073787955	0.066602722
24	0.081704976	0.073350517	0.065882103	0.059202420
25	0.073608086	0.065785217	0.058823306	0.052624373
26	0.066313591	0.059000195	0.052520809	0.046777220
27	0.059741974	0.052914973	0.046893579	0.041579751
28	0.053821598	0.047457375	0.041869267	0.036959779
29	0.048487926	0.042562668	0.037383274	0.032853137
30	0.043682816	0.038172796	0.033377923	0.029202788
31	0.039353889	0.034235692	0.029801717	0.025958034
32	0.035453954	0.030704656	0.026608676	0.023073808
33	0.031940499	0.027537808	0.023757746	0.020510051
34	0.028775224	0.024697586	0.021212274	0.018231157
35	0.025923625	0.022150301	0.018939530	0.016205473
36	0.023354617	0.019865741	0.016910295	0.014404864
37	0.021040196	0.017816808	0.015098477	0.012804324
38	0.018955131	0.015979200	0.013480783	0.011381621
39	0.017076695	0.014331121	0.012036413	0.010116997
40	0.015384410	0.012853023	0.010746798	0.008992886
41	0.013859828	0.011527375	0.009595355	0.007993676
42	0.012486332	0.010338453	0.008567281	0.007105490
43	0.011248948	0.009272155	0.007649358	0.006315991
44	0.010134187	0.008315834	0.006829784	0.005614214
45	0.009129898	0.007458147	0.006098021	0.004990413
46	0.008225133	0.006688921	0.005444662	0.004435922
47	0.007410030	0.005999032	0.004861305	0.003943042
48	0.006675703	0.005380298	0.004340451	0.003504926
49	0.006014147	0.004825379	0.003875403	0.003115490
50	0.005418150	0.004327694	0.003460181	0.002769324
60	0.001908188	0.001457162	0.001114085	0.000852802
70	0.000672034	0.000490635	0.000358705	0.000262617
80	0.000236680	0.000165200	0.000115493	0.000080872
90	0.000083355	0.000055623	0.000037185	0.000024904
100	0.000029356	0.000018728	0.000011972	0.000007669

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 13.0	13.5	14.0	14.5
1	0.884955752	0.881057268	0.877192982	0.873362445
2	0.783146683	0.776261910	0.769467528	0.762761961
3	0.693050162	0.683931198	0.674971516	0.666167651
4	0.613318727	0.602582554	0.592080277	0.581805809
5	0.542759936	0.530909739	0.519368664	0.508127344
6	0.480318527	0.467761884	0.455586547	0.443779340
7	0.425060643	0.412125008	0.399637322	0.387580209
8	0.376159861	0.363105734	0.350559054	0.338497999
9	0.332884833	0.319916946	0.307507942	0.295631440
10	0.294588348	0.281865151	0.269743809	0.258193398
11	0.260697653	0.248339340	0.236617376	0.225496417
12	0.230705887	0.218801180	0.207559102	0.196940102
13	0.204164502	0.192776370	0.182069388	0.172000089
14	0.180676550	0.169847022	0.159709989	0.150218418
15	0.159890752	0.149644953	0.140096482	0.131195125
16	0.141496241	0.131845774	0.122891650	0.114580895
17	0.125217912	0.116163677	0.107799693	0.100070651
18	0.110812312	0.102346852	0.094561134	0.087397948
19	0.098063993	0.090173438	0.082948363	0.076330086
20	0.086782294	0.079447963	0.072761722	0.066663830
21	0.076798491	0.069998205	0.063826072	0.058221686
22	0.067963266	0.061672427	0.055987782	0.050848634
23	0.060144483	0.054336940	0.049112090	0.044409287
24	0.053225206	0.047873956	0.043080781	0.038785404
25	0.047101952	0.042179697	0.037790158	0.033873715
26	0.041683144	0.037162729	0.033149262	0.029584030
27	0.036887738	0.032742492	0.029078300	0.025837581
28	0.032644016	0.028848011	0.025507280	0.022565573
29	0.028888509	0.025416749	0.022374807	0.019707924
30	0.025565052	0.022393612	0.019627024	0.017212161
31	0.022623940	0.019730054	0.017216687	0.015032455
32	0.020021186	0.017383308	0.015102357	0.013128781
33	0.017717864	0.015315690	0.013247682	0.011466184
34	0.015679525	0.013494000	0.011620773	0.010014135
35	0.013875686	0.011888986	0.010193661	0.008745969
36	0.012279368	0.010474878	0.008941808	0.007638401
37	0.010866697	0.009228967	0.007843691	0.006671092
38	0.009616546	0.008131249	0.006880431	0.005826282
39	0.008510218	0.007164096	0.006035465	0.005088455
40	0.007531166	0.006311978	0.005294268	0.004444066
41	0.006664749	0.005561214	0.004644095	0.003881280
42	0.005898008	0.004899748	0.004073767	0.003389764
43	0.005219476	0.004316959	0.003573480	0.002960493
44	0.004619005	0.003803488	0.003134631	0.002585583
45	0.004087615	0.003351091	0.002749677	0.002258151
46	0.003617358	0.002952503	0.002411997	0.001972184
47	0.003201202	0.002601324	0.002115787	0.001722432
48	0.002832922	0.002291915	0.001855953	0.001504307
49	0.002507011	0.002019309	0.001628029	0.001313805
50	0.002218593	0.001779126	0.001428096	0.001147428
60	0.000653571	0.000501473	0.000385220	0.000296258
70	0.000192534	0.000141348	0.000103910	0.000076491
80	0.000056718	0.000039841	0.000028029	0.000019749
90	0.000016708	0.000011229	0.000007560	0.000005099
100	0.000004922	0.000003165	0.000002039	0.000001316

Дисконтные множители (сложные проценты)

Число Пер-в	Ставка процентов 15.0	15.5	16.0	16.5
1	0.869565217	0.865800865	0.862068965	0.858369098
2	0.756143667	0.749611139	0.743162901	0.736797509
3	0.657516232	0.649013973	0.640657673	0.632444214
4	0.571753245	0.561916860	0.552291097	0.542870570
5	0.497176735	0.486508103	0.476113015	0.465983322
6	0.432327595	0.421219137	0.410442254	0.399985684
7	0.375937039	0.364691894	0.353829529	0.343335351
8	0.326901773	0.315750557	0.305025456	0.294708455
9	0.284262412	0.273377106	0.262952979	0.252968631
10	0.247184706	0.236690135	0.226683603	0.217140456
11	0.214943222	0.204926523	0.195416899	0.186386657
12	0.186907150	0.177425561	0.168462844	0.159988547
13	0.162527956	0.153615205	0.145226590	0.137329225
14	0.141328657	0.133000177	0.125195336	0.117879163
15	0.122894485	0.115151668	0.107927013	0.101183831
16	0.106864769	0.099698414	0.093040529	0.086853074
17	0.092925886	0.086318973	0.080207352	0.074551994
18	0.080805118	0.074735042	0.069144269	0.063993128
19	0.070265320	0.064705664	0.059607129	0.054929724
20	0.061100278	0.056022220	0.051385456	0.047149977
21	0.053130677	0.048504086	0.044297806	0.040472083
22	0.046200588	0.041994880	0.038187764	0.034739986
23	0.040174425	0.036359203	0.032920486	0.029819730
24	0.034934282	0.031479830	0.028379729	0.025596335
25	0.030377637	0.027255264	0.024465284	0.021971103
26	0.026415336	0.023597631	0.021090762	0.018859316
27	0.022969858	0.020430849	0.018181691	0.016188254
28	0.019973789	0.017689047	0.015673872	0.013895497
29	0.017368512	0.015315192	0.013511958	0.011927465
30	0.015103054	0.013259906	0.011648240	0.010238167
31	0.013133090	0.011480438	0.010041586	0.008788126
32	0.011420079	0.009939773	0.008656540	0.007543453
33	0.009930503	0.008605864	0.007462534	0.006475069
34	0.008635220	0.007450965	0.006433219	0.005557999
35	0.007508887	0.006451052	0.005545878	0.004770815
36	0.006529467	0.005585326	0.004780930	0.004095120
37	0.005677797	0.004835780	0.004121491	0.003515124
38	0.004937215	0.004186822	0.003553009	0.003017274
39	0.004293230	0.003624954	0.003062939	0.002589935
40	0.003733244	0.003138489	0.002640465	0.002223120
41	0.003246299	0.002717306	0.002276263	0.001908257
42	0.002822868	0.002352646	0.001962295	0.001637989
43	0.002454668	0.002036923	0.001691634	0.001405999
44	0.002134494	0.001763569	0.001458305	0.001206866
45	0.001856082	0.001526900	0.001257159	0.001035937
46	0.001613984	0.001321991	0.001083758	0.000889216
47	0.001403464	0.001144581	0.000934274	0.000763275
48	0.001220404	0.000990979	0.000805409	0.000655172
49	0.001061220	0.000857991	0.000694318	0.000562379
50	0.000922800	0.000742849	0.000598550	0.000482729
60	0.000228102	0.000175825	0.000135681	0.000104820
70	0.000056383	0.000041616	0.000030756	0.000022760
80	0.000013937	0.000009850	0.000006972	0.000004942
90	0.000003445	0.000002331	0.000001580	0.000001073
100	0.000000851	0.000000551	0.000000358	0.000000233

Таблица 4. Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 5.00	5.50	6.00	6.50
1	0.999999999	1.000000000	0.999999999	1.000000000
2	2.050000000	2.055000000	2.060000000	2.065000000
3	3.152500000	3.168025000	3.183600000	3.199225000
4	4.310124999	4.342266375	4.374616000	4.407174625
5	5.525631249	5.581091025	5.637092959	5.693640975
6	6.801912812	6.888051032	6.975318537	7.063727639
7	8.142008453	8.266893838	8.393837649	8.522869935
8	9.549108875	9.721573000	9.897467908	10.07685648
9	11.02656431	11.25625951	11.49131598	11.73185215
10	12.57789253	12.87535378	13.18079494	13.49442254
11	14.20678716	14.58349824	14.97164263	15.37156000
12	15.91712652	16.38559065	16.86994119	17.37071140
13	17.71298284	18.28679813	18.88213766	19.49980765
14	19.59863198	20.29257203	21.01506592	21.76729514
15	21.57856358	22.40866349	23.27596988	24.18216933
16	23.65749176	24.64113998	25.67252807	26.75401033
17	25.84036635	26.99640268	28.21287976	29.49302101
18	28.13238467	29.48120483	30.90565254	32.41006737
19	30.53900390	32.10267110	33.75999170	35.51672175
20	33.06595410	34.86831801	36.78559120	38.82530867
21	35.71925180	37.78607550	39.99272667	42.34895373
22	38.50521439	40.86430965	43.39229027	46.10163572
23	41.43047511	44.11184668	46.99582769	50.09824204
24	44.50199887	47.53799825	50.81557735	54.35462778
25	47.72709881	51.15258815	54.86451199	58.88767858
26	51.11345375	54.96598050	59.15638271	63.71537769
27	54.66912644	58.98910943	63.70576567	68.85687724
28	58.40258276	63.23351045	68.52811161	74.33257426
29	62.32271190	67.71135352	73.63979831	80.16419159
30	66.43884750	72.43547797	79.05818621	86.37486404
31	70.76078987	77.41942926	84.80167738	92.98923021
32	75.29882937	82.67749786	90.88977803	100.0335301
33	80.06377083	88.22476025	97.34316471	107.5357096
34	85.06695938	94.07712206	104.1837545	115.5255307
35	90.32030734	100.2513637	111.4347798	124.0346902
36	95.83632271	106.7651887	119.1208666	133.0969451
37	101.6281388	113.6372741	127.2681186	142.7482465
38	107.7095457	120.8873242	135.9042057	153.0268825
39	114.0950230	128.5361270	145.0584581	163.9736299
40	120.7997742	136.6056140	154.7619656	175.6319159
41	127.8397629	145.1189228	165.0476835	188.0479904
42	135.2317511	154.1004636	175.9505445	201.2711098
43	142.9933386	163.5759891	187.5075772	215.3537319
44	151.1430055	173.5726685	199.7580318	230.3517245
45	159.7001558	184.1191652	212.7435137	246.3245866
46	168.6851636	195.2457193	226.5081246	263.3356847
47	178.1194218	206.9842339	241.0986120	281.4525042
48	188.0253929	219.3683667	256.5645288	300.7469170
49	198.4266625	232.4336269	272.9584005	321.2954666
50	209.3479957	246.2174764	290.3359045	343.1796719
60	353.5837178	433.4503717	533.1281808	657.6898421
70	588.5285106	753.2712042	967.9321696	1248.068665
80	971.2288212	1299.571387	1746.599891	2356.290874
90	1594.607300	2232.731016	3141.075187	4436.576301
100	2610.025156	3826.702466	5638.368058	8341.558016

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 7.00	7.50	8.00	8.50
1	0.999999999	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.070000000	2.075000000	2.080000000	2.085000000
3	3.214900000	3.230625000	3.246400000	3.262225000
4	4.439943000	4.472921875	4.506112000	4.539514125
5	5.750739010	5.808391015	5.866600960	5.925372825
6	7.153290740	7.244020341	7.335929036	7.429029515
7	8.654021092	8.787321867	8.922803359	9.060497024
8	10.25980256	10.44637100	10.63662762	10.83063927
9	11.97798874	12.22984883	12.48755783	12.75124361
10	13.81644796	14.14708749	14.48656246	14.83509931
11	15.78359931	16.20811905	16.64548746	17.09608275
12	17.88845127	18.42372798	18.97712646	19.54924979
13	20.14064286	20.80550758	21.49529657	22.21093602
14	22.55048786	23.36592063	24.21492030	25.09886558
15	25.12902201	26.11836470	27.15211392	28.23226916
16	27.88805355	29.07724205	30.32428304	31.63201204
17	30.84021729	32.25803521	33.75022568	35.32073306
18	33.99903251	35.67738785	37.45024374	39.32299537
19	37.37896478	39.35319194	41.44626323	43.66544998
20	40.99549232	43.30468133	45.76196429	48.37701323
21	44.86517678	47.55253243	50.42292144	53.48905935
22	49.00573915	52.11897237	55.45675515	59.03562940
23	53.43614089	57.02789529	60.89329557	65.05365790
24	58.17667076	62.30498744	66.76475921	71.58321882
25	63.24903771	67.97786150	73.10593995	78.66779242
26	68.67647035	74.07620111	79.95441514	86.35455477
27	74.48382328	80.63191620	87.35076836	94.69469193
28	80.69769091	87.67930991	95.33882982	103.7437407
29	87.34652927	95.25525816	103.9659362	113.5619587
30	94.46078632	103.3994025	113.2832111	124.2147252
31	102.0730413	112.1543577	123.3458680	135.7729768
32	110.2181542	121.5659345	134.2135374	148.3136798
33	118.9334250	131.6833796	145.9506204	161.9203426
34	128.2587648	142.5596331	158.6266700	176.6835718
35	138.2368783	154.2516055	172.3168036	192.7016754
36	148.9134598	166.8204760	187.1021479	210.0813178
37	160.3374020	180.3320117	203.0703198	228.9382298
38	172.5610201	194.8569125	220.3159454	249.3979793
39	185.6402915	210.4711810	238.9412210	271.5968076
40	199.6351119	227.2565196	259.0565187	295.6825362
41	214.6095698	245.3007585	280.7810402	321.8155518
42	230.6322397	264.6983154	304.2435234	350.1698737
43	247.7764964	285.5506891	329.5830053	380.9343130
44	266.1208512	307.9669908	356.9496457	414.3137296
45	285.7493108	332.0645151	386.5056173	450.5303966
46	306.7517625	357.9693537	418.4260667	489.8254803
47	329.2243859	385.8170552	452.9001521	532.4606461
48	353.2700929	415.7533344	490.1321642	578.7198011
49	378.9989995	447.9348345	530.3427374	628.9109841
50	406.5289294	482.5299471	573.7701564	683.3684178
60	813.5203833	1008.656538	1253.213295	1559.919776
70	1614.134174	2093.020048	2720.080073	3541.787885
80	3189.062679	4327.927466	5886.935428	8022.758863
90	6287.185426	8934.142195	12723.93861	18154.16004
100	12381.66179	18427.69613	27484.51570	41061.09036

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 9.00	9.50	10.00	11.50
1	1.000000000	0.999999999	1.000000000	0.999999999
2	2.090000000	2.095000000	2.100000000	2.105000000
3	3.278100000	3.294025000	3.310000000	3.326025000
4	4.573129000	4.606957375	4.641000000	4.675257625
5	5.984710610	6.044618325	6.105100000	6.166159675
6	7.523334564	7.618857066	7.715610000	7.813606441
7	9.200434675	9.342648487	9.487171000	9.634035117
8	11.02847379	11.23020009	11.43588810	11.64560880
9	13.02103643	13.29706910	13.57947691	13.86839773
10	15.19292971	15.56029066	15.93742460	16.32457949
11	17.56029339	18.03851828	18.53116706	19.03866033
12	20.14071979	20.75217751	21.38428376	22.03771967
13	22.95338474	23.72363438	24.52271214	25.35168023
14	26.01918919	26.97737964	27.97498335	29.01360666
15	29.36091621	30.54023071	31.77248169	33.06003536
16	33.00339867	34.44155263	35.94972986	37.53133907
17	36.97370456	38.71350013	40.54470285	42.47212968
18	41.30133797	43.39128264	45.59917313	47.93170329
19	46.01845838	48.51345449	51.15909044	53.96453214
20	51.16011964	54.12223267	57.27499949	60.63080801
21	56.76453041	60.26384477	64.00249944	67.99704285
22	62.87333814	66.98891003	71.40274938	76.13673236
23	69.53193858	74.35285648	79.54302432	85.13108925
24	76.78981305	82.41637785	88.49732675	95.06985362
25	84.70089622	91.24593374	98.34705943	106.0521882
26	93.32397688	100.9142974	109.1817653	118.1876680
27	102.7231348	111.5011557	121.0999419	131.5973731
28	112.9682169	123.0937655	134.2099361	146.4150973
29	124.1353564	135.7876732	148.6309297	162.7886825
30	136.3075385	149.6875021	164.4940226	180.8814942
31	149.5752170	164.9078148	181.9434249	200.8740511
32	164.0369865	181.5740573	201.1377674	222.9658265
33	179.8003153	199.8235927	222.2515442	247.3772382
34	196.9823437	219.8068340	245.4766986	274.3518483
35	215.7107546	241.6884832	271.0243684	304.1587923
36	236.1247225	265.6488892	299.1268053	337.0954655
37	258.3759476	291.8855336	330.0394858	373.4904894
38	282.6297828	320.6146593	364.0434344	413.7069908
39	309.0664633	352.0730520	401.4477779	458.1462249
40	337.8824450	386.5199919	442.5925556	507.2515785
41	369.2918651	424.2393912	487.8518112	561.5129942
42	403.5281329	465.5421333	537.6369923	621.4718586
43	440.8456649	510.7686360	592.4006916	687.7264038
44	481.5217747	560.2916564	652.6407607	760.9376762
45	525.8587345	614.5193638	718.9048368	841.8361322
46	574.1860206	673.8987033	791.7953205	931.2289261
47	626.8627624	738.9190802	871.9748526	1030.007963
48	684.2804110	810.1163928	960.1723378	1139.158799
49	746.8656480	888.0774501	1057.189571	1259.770473
50	815.0835564	973.4448079	1163.908528	1393.046373
60	1944.792132	2427.978093	3034.816395	3797.165059
70	4619.223179	6032.642647	7887.469568	10322.13753
80	10950.57409	14965.82188	20474.00214	28031.44036
90	25939.18424	37104.27333	53120.22612	76095.91998
100	61422.67546	91968.39504	137796.1234	206546.8035

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 11.00	11.50	12.00	12.50
1	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.110000000	2.115000000	2.120000000	2.125000000
3	3.342100000	3.358225000	3.374400000	3.390625000
4	4.709731000	4.744420875	4.779328000	4.814453125
5	6.227801410	6.290029275	6.352847360	6.416259765
6	7.912859565	8.013382642	8.115189043	8.218292236
7	9.783274117	9.934921646	10.08901172	10.24557876
8	11.85943427	12.07743763	12.29969313	12.52627611
9	14.16397204	14.46634296	14.77565631	15.09206062
10	16.72200896	17.12997240	17.54873507	17.97856820
11	19.56142995	20.09991923	20.65458327	21.22588922
12	22.71318724	23.41140994	24.13313327	24.87912538
13	26.21163784	27.10372208	28.02910926	28.98901605
14	30.09491800	31.22065012	32.39260237	33.61264306
15	34.40535898	35.81102489	37.27971466	38.81422344
16	39.18994847	40.92929275	42.75328042	44.66600137
17	44.50084280	46.63616141	48.88367407	51.24925154
18	50.39593551	52.99931998	55.74971495	58.65540799
19	56.93948842	60.09424178	63.43968075	66.98733399
20	64.20283214	68.00507958	72.05244244	76.36075073
21	72.26514368	76.82566373	81.69873553	86.90584458
22	81.21430948	86.66061506	92.50258380	98.76907515
23	91.14788353	97.62658579	104.6028938	112.1152095
24	102.1741507	109.8536431	118.1552411	127.1296107
25	114.4133073	123.4868121	133.3338700	144.0208120
26	127.9987711	138.6877955	150.3339344	163.0234136
27	143.0786359	155.6368920	169.3740066	184.4013403
28	159.8172858	174.5351345	190.6988873	208.4515078
29	178.3971873	195.6066750	214.5827538	235.5079463
30	199.0208779	219.1014427	241.3326843	265.9464396
31	221.9131745	245.2981086	271.2926064	300.1897445
32	247.3236237	274.5073911	304.8477192	338.7134626
33	275.5292223	307.0757410	342.4294455	382.0526454
34	306.8374367	343.3894513	384.5209790	430.8092261
35	341.5895548	383.8792382	431.6634965	485.6603793
36	380.1644058	429.0253506	484.4631160	547.3679268
37	422.9824904	479.3632659	543.5986900	616.7889176
38	470.5105644	535.4900415	609.8305328	694.8875323
39	523.2667265	598.0713962	684.0101967	782.7484739
40	581.8260664	667.8496068	767.0914203	881.5920331
41	646.8269337	745.6523116	860.1423908	992.7910373
42	718.9778964	832.4023274	964.3594777	1117.889917
43	799.0654650	929.1285951	1081.082615	1258.626156
44	887.9626662	1036.978383	1211.812528	1416.954426
45	986.6385594	1157.230897	1358.230032	1595.073729
46	1096.168801	1291.312450	1522.217636	1795.457945
47	1217.747369	1440.813382	1705.883752	2020.890188
48	1352.699579	1607.506921	1911.589802	2274.501462
49	1502.496533	1793.370217	2141.980579	2559.814145
50	1668.771152	2000.607792	2400.018248	2880.790913
60	4755.065839	5958.828737	7471.641112	9372.831471
70	13518.35574	17714.53447	23223.33189	30454.57127
80	38401.02500	52628.35541	72145.69250	98913.74818
90	109053.3983	156320.5471	224091.1185	321222.6727
100	309665.2297	464280.8427	696010.5477	1043131.117

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 13.00	13.50	14.00	14.50
1	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.130000000	2.135000000	2.140000000	2.145000000
3	3.406900000	3.423225000	3.439600000	3.456025000
4	4.849797000	4.885360375	4.921144000	4.957148625
5	6.480270610	6.544884025	6.610104160	6.675935175
6	8.322705789	8.428443369	8.535518742	8.643945776
7	10.40465754	10.56628322	10.73049136	10.89731791
8	12.75726302	12.99273145	13.23276015	13.47742901
9	15.41570721	15.74675020	16.08534658	16.43165621
10	18.41974915	18.87256148	19.33729510	19.81424636
11	21.81431654	22.42035728	23.04451641	23.68731209
12	25.65017769	26.44710551	27.27074871	28.12197234
13	29.98470079	31.01746476	32.08865353	33.19965833
14	34.88271189	36.20482250	37.58106502	39.01360879
15	40.41746444	42.09247354	43.84241413	45.67058207
16	46.67173482	48.77495747	50.98035211	53.29281647
17	53.73906034	56.35957673	59.11760140	62.02027485
18	61.72513819	64.96811959	68.39406560	72.01321471
19	70.74940616	74.73881573	78.96923478	83.45513084
20	80.94682896	85.82855585	91.02492765	96.55612482
21	92.46991672	98.41541089	104.7684175	111.5567629
22	105.4910059	112.7014913	120.4359959	128.7324935
23	120.2048366	128.9161927	138.2970354	148.3987051
24	136.8314654	147.3198787	158.6586203	170.9165173
25	155.6195559	168.2080623	181.8708272	196.6994123
26	176.8500982	191.9161507	208.3327430	226.2208271
27	200.8406109	218.8248311	238.4993270	260.0228470
28	227.9498904	249.3661833	272.8892328	298.7261599
29	258.5833761	284.0306180	312.0937254	343.0414531
30	293.1992150	323.3747515	356.7868470	393.7824638
31	332.3151130	368.0303429	407.7370056	451.8809210
32	376.5160777	418.7144392	465.8201864	518.4036546
33	426.4631678	476.2408885	532.0350125	594.5721845
34	482.9033796	541.5334085	607.5199142	681.7851513
35	546.6808189	615.6404186	693.5727022	781.6439982
36	618.7493254	699.7518751	791.6728805	895.9823779
37	700.1867377	795.2183783	903.5070838	1026.899822
38	792.2110136	903.5728594	1030.998075	1176.800297
39	896.1984454	1026.555195	1176.337806	1348.436340
40	1013.704243	1166.140146	1342.025099	1544.959609
41	1146.485795	1324.569066	1530.908612	1769.978752
42	1296.528948	1504.385890	1746.235818	2027.625672
43	1466.077711	1708.477985	1991.708833	2322.631394
44	1657.667814	1940.122514	2271.548070	2660.412946
45	1874.164630	2203.039053	2590.564799	3047.172824
46	2118.806031	2501.449325	2954.243871	3490.012883
47	2395.250816	2840.144984	3368.838013	3997.064751
48	2707.633422	3224.564557	3841.475335	4577.639140
49	3060.625767	3660.880772	4380.281882	5242.396815
50	3459.507116	4156.099677	4994.521346	6003.544354
60	11761.94979	14763.86554	18535.13328	23271.93610
70	39945.15095	52398.05272	68733.17846	90153.55229
80	135614.9265	185916.4639	254828.4415	349190.4474
90	460372.4271	659612.5226	944724.7670	1352457.367
100	1562783.648	2340189.410	3502323.129	5238176.086

Коэффициенты наращения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 15.00	15.50	16.00	16.50
1	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
2	2.150000000	2.155000000	2.160000000	2.165000000
3	3.472500000	3.489025000	3.505600000	3.522225000
4	4.993375000	5.029823875	5.066496000	5.103392125
5	6.742381250	6.809446575	6.877135360	6.945451825
6	8.753738437	8.864910794	8.977477017	9.091451376
7	11.06679920	11.23897196	11.41387334	11.59154085
8	13.72681908	13.98101262	14.24009307	14.50414509
9	16.78584194	17.14806958	17.51850796	17.89732903
10	20.30371823	20.80602036	21.32146924	21.85038832
11	24.34927597	25.03095352	25.73290432	26.45570240
12	29.00166737	29.91075131	30.85016901	31.82089329
13	34.35191747	35.54691777	36.78619605	38.07134069
14	40.50470509	42.05669002	43.67198742	45.35311190
15	47.58041086	49.57547698	51.65950541	53.83637536
16	55.71747249	58.25967591	60.92502627	63.71937730
17	65.07509336	68.28992567	71.67303048	75.23307456
18	75.83635737	79.87486415	84.14071535	88.64653186
19	88.21181097	93.25546810	98.60322981	104.2732096
20	102.4435826	108.7100656	115.3797465	122.4782892
21	118.8101200	126.5601258	134.8405060	143.6872069
22	137.6316380	147.1769453	157.4149870	168.3955960
23	159.2763837	170.9893718	183.6013849	197.1808694
24	184.1678412	198.4927245	213.9776065	230.7157128
25	212.7930174	230.2590968	249.2140235	269.7838055
26	245.7119700	266.9492568	290.0882673	315.2981334
27	283.5687656	309.3263916	337.5023901	368.3223254
28	327.1040804	358.2719823	392.5027725	430.0955091
29	377.1696925	414.8041395	456.3032161	502.0612681
30	434.7451463	480.0987812	530.3117307	585.9013773
31	500.9569183	555.5140923	616.1616076	683.5751046
32	577.1004561	642.6187766	715.7474648	797.3649968
33	664.6655245	743.2246869	831.2670592	929.9302213
34	765.3653532	859.4245134	965.2697886	1084.368707
35	881.1701561	993.6353130	1120.712954	1264.289544
36	1014.345679	1148.648786	1301.027027	1473.897319
37	1167.497531	1327.689348	1510.191352	1718.090377
38	1343.622161	1534.481197	1752.821968	2002.575289
39	1546.165485	1773.325783	2034.273483	2334.000212
40	1779.090308	2049.191279	2360.757240	2720.110247
41	2046.953854	2367.815927	2739.478399	3169.928438
42	2354.996932	2735.827396	3178.794943	3693.966630
43	2709.246472	3160.880643	3688.402134	4304.471124
44	3116.633443	3651.817142	4279.546475	5015.708860
45	3585.128460	4218.848800	4965.273911	5844.300822
46	4123.897729	4873.770364	5760.717737	6809.610457
47	4743.482388	5630.204770	6683.432575	7934.196183
48	5456.004746	6503.886509	7753.781787	9244.338553
49	6275.405458	7512.988918	8995.386873	10770.65441
50	7217.716277	8678.502201	10435.64877	12548.81239
60	29219.99164	36686.89771	46057.50853	57813.07271
70	118231.4669	155020.4966	203201.0302	266269.2078
80	478332.5293	654972.0420	896429.4744	1226275.180
90	1935142.168	2767233.903	3954561.750	5647404.198
100	7828749.672	11691399.07	17445313.74	26008091.88

Таблица 5. Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 5.00	5.50	6.00	6.50
1	0.952380952	0.947867298	0.943396226	0.938967136
2	1.859410430	1.846319714	1.833392666	1.820626418
3	2.723248029	2.697933378	2.673011949	2.648475510
4	3.545950504	3.505150121	3.465105612	3.425798601
5	4.329476670	4.270284475	4.212363785	4.155679438
6	5.075692067	4.995530308	4.917324326	4.841013557
7	5.786373397	5.682967117	5.582381439	5.484519771
8	6.463212759	6.334565987	6.209793810	6.088750959
9	7.107821675	6.952195249	6.801692274	6.656104187
10	7.721734929	7.537625828	7.360087051	7.188830222
11	8.306414218	8.092536330	7.886874576	7.689042462
12	8.863251636	8.618517848	8.383843940	8.158725317
13	9.393572987	9.117078529	8.852682962	8.599742081
14	9.898640940	9.589647895	9.294983927	9.013842330
15	10.37965803	10.03758094	9.712248987	9.402668854
16	10.83776956	10.46216203	10.10589527	9.767764182
17	11.27406624	10.86460856	10.47725969	10.11057669
18	11.68958690	11.24607446	10.82760348	10.43246638
19	12.08532086	11.60765352	11.15811649	10.73471021
20	12.46221034	11.95038248	11.46992121	11.01850724
21	12.82115270	12.27524406	11.76407662	11.28498333
22	13.16300257	12.58316972	12.04158171	11.53519561
23	13.48857388	12.87504239	12.30337897	11.77013672
24	13.79864179	13.15169895	12.55035752	11.99073871
25	14.09394456	13.41393265	12.78335615	12.19787672
26	14.37518530	13.66249540	13.00316618	12.39237251
27	14.64303362	13.89809991	13.21053413	12.57499766
28	14.89812725	14.12142171	13.40616428	12.74647667
29	15.14107357	14.33310115	13.59072102	12.90748984
30	15.37245102	14.53374517	13.76483115	13.05867590
31	15.59281050	14.72392907	13.92908599	13.20063465
32	15.80267666	14.90419817	14.08404338	13.33392925
33	16.00254920	15.07506935	14.23022961	13.45908850
34	16.19290400	15.23703256	14.36814114	13.57660892
35	16.37419429	15.39055219	14.49824636	13.68695673
36	16.54685170	15.53606843	14.62098713	13.79056970
37	16.71128734	15.67399851	14.73678031	13.88785887
38	16.86789270	15.80473792	14.84601916	13.97921021
39	17.01704067	15.92866154	14.94907468	14.06498611
40	17.15908635	16.04612468	15.04629687	14.14552686
41	17.29436795	16.15746415	15.13801591	14.22115198
42	17.42320757	16.26299920	15.22454331	14.29216149
43	17.54591197	16.36303241	15.30617294	14.35883708
44	17.66277331	16.45785063	15.38318202	14.42144326
45	17.77406982	16.54772571	15.45583209	14.48022842
46	17.88006649	16.63291537	15.52436990	14.53542574
47	17.98101571	16.71366386	15.58902820	14.58725422
48	18.07715782	16.79020271	15.65002661	14.63591945
49	18.16872173	16.86275138	15.70757227	14.68161451
50	18.25592546	16.93151790	15.76186063	14.72452067
60	18.92928952	17.44985416	16.16142770	15.03296574
70	19.34267664	17.75330406	16.38454386	15.19728246
80	19.59646048	17.93095291	16.50913077	15.28481826
90	19.75226174	18.03495398	16.57869944	15.33145085
100	19.84791020	18.09583938	16.61754622	15.35629325

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 7.00	7.50	8.00	8.50
1	0.934579439	0.930232558	0.925925925	0.921658986
2	1.808018167	1.795565170	1.783264746	1.771114273
3	2.624316044	2.600525739	2.577096987	2.554022371
4	3.387211256	3.349326269	3.312126840	3.275596655
5	4.100197435	4.045884902	3.992710037	3.940642079
6	4.766539659	4.693846420	4.622879663	4.553587169
7	5.389289401	5.296601321	5.206370059	5.118513520
8	5.971298506	5.857303554	5.746638943	5.639182968
9	6.515232248	6.378887027	6.246887910	6.119062643
10	7.023581540	6.864080956	6.710081398	6.561348058
11	7.498674337	7.315424145	7.138964258	6.968984385
12	7.942686296	7.735278274	7.536078016	7.344686069
13	8.357650744	8.125840255	7.903775941	7.690954903
14	8.745467985	8.489153725	8.244236982	8.010096684
15	9.107914005	8.827119745	8.559478687	8.304236575
16	9.446648602	9.141506739	8.851369155	8.575333249
17	9.763222993	9.433959757	9.121638106	8.825191935
18	10.05908691	9.706009077	9.371887136	9.055476437
19	10.33559524	9.959078211	9.603599200	9.267720219
20	10.59401424	10.19449135	9.818147407	9.463336607
21	10.83552733	10.41348033	10.01680315	9.643628209
22	11.06124049	10.61719100	10.20074366	9.809795585
23	11.27218738	10.80668931	10.37105894	9.962945239
24	11.46933400	10.98296680	10.52875828	10.10409699
25	11.65358317	11.14694586	10.67477618	10.23419077
26	11.82577867	11.29948452	10.80997795	10.35409288
27	11.98670903	11.44138095	10.93516477	10.46460173
28	12.13711125	11.57337762	11.05107849	10.56645321
29	12.27767406	11.69616523	11.15840601	10.66032554
30	12.40904118	11.81038626	11.25778334	10.74684381
31	12.53181419	11.91663838	11.34979939	10.82658416
32	12.64655531	12.01547756	11.43499943	10.90007757
33	12.75379001	12.10742099	11.51388836	10.96781342
34	12.85400936	12.19294976	11.58693367	11.03024279
35	12.94767230	12.27251140	11.65456821	11.08778137
36	13.03520775	12.34652223	11.71719279	11.14081232
37	13.11701659	12.41536952	11.77517851	11.18968878
38	13.19347345	12.47941351	11.82886899	11.23473620
39	13.26492846	12.53898931	11.87858240	11.27625456
40	13.33170884	12.59440866	11.92461333	11.31452033
41	13.39412041	12.64596154	11.96723456	11.34978832
42	13.45244898	12.69391771	12.00669867	11.38229339
43	13.50696166	12.73852811	12.04323951	11.41225197
44	13.55790810	12.78002614	12.07707362	11.43986356
45	13.60552159	12.81862897	12.10840150	11.46531204
46	13.65002017	12.85453858	12.13740879	11.48876686
47	13.69160764	12.88794286	12.16426740	11.51038420
48	13.73047443	12.91901662	12.18913648	11.53030802
49	13.76679853	12.94792243	12.21216341	11.54867098
50	13.80074629	12.97481157	12.23348464	11.56559538
60	14.03918115	13.15938075	12.37655182	11.67664221
70	14.16038934	13.24893259	12.44281960	11.72575660
80	14.22200543	13.29238260	12.47351441	11.74747918
90	14.25332793	13.31346429	12.48773204	11.75708676
100	14.26925070	13.32369299	12.49431756	11.76133605

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 9.00	9.50	10.00	10.50
1	0.917431192	0.913242009	0.909090909	0.904977375
2	1.759111185	1.747252976	1.735537190	1.723961425
3	2.531294666	2.508906827	2.486851991	2.465123462
4	3.239719877	3.204481121	3.169865446	3.135858336
5	3.889651263	3.839708786	3.790786769	3.742858223
6	4.485918590	4.419825375	4.355260699	4.292179387
7	5.032952835	4.949612215	4.868418817	4.789302613
8	5.534819114	5.433435813	5.334926197	5.239187885
9	5.995246894	5.875283847	5.759023816	5.646323878
10	6.417657701	6.278798034	6.144567105	6.014772740
11	6.805190551	6.647304140	6.495061005	6.348210624
12	7.160725276	6.983839398	6.813691822	6.649964366
13	7.486903923	7.291177532	7.103356202	6.923044675
14	7.786150388	7.571851627	7.366687457	7.170176176
15	8.060688429	7.828175002	7.606079506	7.393824594
16	8.312558192	8.062260276	7.823708642	7.596221352
17	8.543631369	8.276036782	8.021553311	7.779385839
18	8.755625109	8.471266467	8.201412100	7.945145555
19	8.950114779	8.649558417	8.364920091	8.095154349
20	9.128545669	8.812382116	8.513563719	8.230908913
21	9.292243733	8.961079558	8.648694290	8.353763722
22	9.442425443	9.096876309	8.771540264	8.464944545
23	9.580206828	9.220891606	8.883218422	8.565560674
24	9.706611769	9.334147586	8.984744020	8.656615994
25	9.822579605	9.437577704	9.077040018	8.739018999
26	9.928972114	9.532034433	9.160945471	8.813591855
27	10.02657992	9.618296285	9.237223155	8.881078601
28	10.11612836	9.697074233	9.306566505	8.942152580
29	10.19828290	9.769017565	9.369605913	8.997423150
30	10.27365404	9.834719237	9.426914467	9.047441764
31	10.34280187	9.894720764	9.479013151	9.092707479
32	10.40624025	9.949516680	9.526375592	9.133671927
33	10.46444059	9.999558612	9.569432356	9.170743825
34	10.51783541	10.04525900	9.608574869	9.204293054
35	10.56682147	10.08699452	9.644158972	9.234654348
36	10.61176282	10.12510915	9.676508156	9.262130631
37	10.65299341	10.15991703	9.705916506	9.286996046
38	10.69081964	10.19170505	9.732651369	9.309498685
39	10.72552261	10.22073521	9.756955790	9.329863063
40	10.75736019	10.24724676	9.779050718	9.348292365
41	10.78656898	10.27145823	9.799137016	9.364970466
42	10.81336604	10.29356916	9.817397288	9.380063770
43	10.83795049	10.31376179	9.833997534	9.393722868
44	10.86050504	10.33220255	9.849088667	9.406084044
45	10.88119728	10.34904342	9.862807879	9.417270628
46	10.90018099	10.36442322	9.875279890	9.427394233
47	10.91759724	10.37846869	9.886618082	9.436555867
48	10.93357545	10.39129561	9.896925529	9.444846939
49	10.94823436	10.40300969	9.906295935	9.452350171
50	10.96168290	10.41370748	9.914814487	9.459140426
60	11.04799102	10.48087673	9.967157297	9.499982268
70	11.08444850	10.50798048	9.987337716	9.515030398
80	11.09984853	10.51891723	9.995118141	9.520574865
90	11.10635367	10.52333036	9.998117832	9.522617717
100	11.10910152	10.52511113	9.999274342	9.523370404

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 11.00	11.50	12.00	12.50
1	0.900900900	0.896860986	0.892857142	0.888888888
2	1.712523334	1.701220615	1.690051020	1.679012345
3	2.443714715	2.422619386	2.401831268	2.381344307
4	3.102445689	3.069613799	3.037349346	3.005639384
5	3.695897017	3.649877847	3.604776202	3.560568341
6	4.230537853	4.170294033	4.111407323	4.053838525
7	4.712196264	4.637035007	4.563756538	4.492300911
8	5.146122760	5.055636777	4.967639766	4.882045255
9	5.537047532	5.431064374	5.328249791	5.228484671
10	5.889232011	5.767770739	5.650223028	5.536430818
11	6.206515325	6.069749542	5.937699132	5.810160727
12	6.492356149	6.340582549	6.194374225	6.053476202
13	6.749870404	6.583482106	6.423548415	6.269756624
14	6.981865229	6.801329243	6.628168228	6.462005888
15	7.190869575	6.996707842	6.810864489	6.632894123
16	7.379161780	7.171935284	6.973986151	6.784794776
17	7.548794396	7.329089941	7.119630492	6.919817578
18	7.701616573	7.470035821	7.249670082	7.039837847
19	7.839294210	7.596444683	7.365776859	7.146522531
20	7.963328117	7.709815859	7.469443624	7.241353361
21	8.075070376	7.811494044	7.562003236	7.325647432
22	8.175739077	7.902685241	7.644645746	7.400575495
23	8.266431601	7.984471068	7.718433702	7.467178218
24	8.348136577	8.057821586	7.784315805	7.526380638
25	8.421744664	8.123606803	7.843139112	7.579005011
26	8.488058256	8.182606998	7.895659921	7.625782232
27	8.547800231	8.235521972	7.942553501	7.667361984
28	8.601621829	8.282979347	7.984422769	7.704321764
29	8.650109756	8.325542015	8.021806043	7.737174901
30	8.693792573	8.363714812	8.055183967	7.766377690
31	8.733146462	8.397950504	8.084985685	7.792335724
32	8.768600416	8.428655160	8.111594362	7.815409532
33	8.800540916	8.456192969	8.135352108	7.835919584
34	8.829316140	8.480890555	8.156564383	7.854150742
35	8.855239766	8.503040856	8.175503913	7.870356215
36	8.878594384	8.522906598	8.192414208	7.884761080
37	8.899634580	8.540723406	8.207512686	7.897565404
38	8.918589711	8.556702606	8.220993469	7.908947026
39	8.935666407	8.571033727	8.233029883	7.919064023
40	8.951050817	8.583886751	8.243776681	7.928056909
41	8.964910646	8.595414126	8.253372037	7.936050586
42	8.977396978	8.605752580	8.261939319	7.943156076
43	8.988645926	8.615024735	8.269588677	7.949472068
44	8.998780114	8.623340569	8.276418462	7.955086282
45	9.007910012	8.630798717	8.282516484	7.960076695
46	9.016135146	8.637487639	8.287961146	7.964512618
47	9.023545177	8.643486671	8.292822452	7.968455661
48	9.030220880	8.648866970	8.297162903	7.971960587
49	9.036235027	8.653692349	8.301038307	7.975076077
50	9.041653177	8.658020044	8.304498488	7.977845402
60	9.073561922	8.682981196	8.324049285	7.993177577
70	9.084799687	8.691385775	8.330344118	7.997899061
80	9.088757453	8.694215650	8.332370886	7.999353024
90	9.090151317	8.695168487	8.333023451	7.999800766
100	9.090642214	8.695489313	8.333233559	7.999938646

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 13.00	13.50	14.00	14.50
1	0.884955752	0.881057268	0.877192982	0.873362445
2	1.668102435	1.657319179	1.646660510	1.636124406
3	2.361152597	2.341250378	2.321632027	2.302292058
4	2.974471325	2.943832932	2.913712304	2.884097867
5	3.517231261	3.474742671	3.433080968	3.392225211
6	3.997549789	3.942504556	3.888667516	3.836004551
7	4.422610432	4.354629565	4.288304839	4.223584761
8	4.798770294	4.717735299	4.638863893	4.562082760
9	5.131655127	5.037652246	4.946371836	4.857714201
10	5.426243476	5.319517397	5.216115646	5.115907599
11	5.686941129	5.567856738	5.452733023	5.341404017
12	5.917647017	5.786657919	5.660292125	5.538344119
13	6.121811519	5.979434290	5.842361513	5.710344209
14	6.302488070	6.149281312	6.002071503	5.860562628
15	6.462378823	6.298926266	6.142167985	5.991757754
16	6.603875064	6.430772041	6.265059636	6.106338649
17	6.729092977	6.546935719	6.372859330	6.206409301
18	6.839905290	6.649282571	6.467420464	6.293807249
19	6.937969283	6.739456010	6.550368828	6.370137336
20	7.024751578	6.818903974	6.623130551	6.436801166
21	7.101550069	6.888902179	6.686956624	6.495022853
22	7.169513335	6.950574607	6.742944407	6.545871487
23	7.229657819	7.004911548	6.792056497	6.590280775
24	7.282883025	7.052785505	6.835137278	6.629066179
25	7.329984978	7.094965203	6.872927437	6.662939894
26	7.371668122	7.132127932	6.906076699	6.692523925
27	7.408555860	7.164870424	6.935154999	6.718361506
28	7.441199876	7.193718435	6.960662280	6.740927080
29	7.470088386	7.219135185	6.983037087	6.760635004
30	7.495653439	7.241528798	7.002664112	6.777847165
31	7.518277379	7.261258853	7.019880800	6.792879620
32	7.538298566	7.278642161	7.034983158	6.806008402
33	7.556016430	7.293957851	7.048230840	6.817474587
34	7.571695956	7.307451851	7.059851614	6.827488722
35	7.585571642	7.319340838	7.070045275	6.836234692
36	7.597851011	7.329815716	7.078987084	6.843873093
37	7.608717708	7.339044684	7.086830775	6.850544186
38	7.618334255	7.347175933	7.093711206	6.856370468
39	7.626844474	7.354340029	7.099746672	6.861458924
40	7.634375640	7.360652008	7.105040940	6.865902990
41	7.641040390	7.366213223	7.109685035	6.869784271
42	7.646938398	7.371112971	7.113758803	6.873174036
43	7.652157874	7.375429931	7.117332283	6.876134529
44	7.656776880	7.379233419	7.120466915	6.878720113
45	7.660864495	7.382584510	7.123216592	6.880978264
46	7.664481854	7.385537013	7.125628589	6.882950449
47	7.667683057	7.388138338	7.127744377	6.884672881
48	7.670515979	7.390430253	7.129600330	6.886177189
49	7.673022991	7.392449562	7.131228360	6.887490994
50	7.675241584	7.394228689	7.132656456	6.888638423
60	7.687280215	7.403692786	7.140105570	6.894508562
70	7.690826656	7.406360385	7.142114923	6.896024193
80	7.691871396	7.407112288	7.142656933	6.896415519
90	7.692179164	7.407324223	7.142803137	6.896516556
100	7.692269829	7.407383960	7.142842575	6.896542644

Коэффициенты приведения годовой ренты

Число Пер-в	Ставка процентов 15.00	15.50	16.00	16.50
1	0.869565217	0.865800865	0.862068965	0.858369098
2	1.625708884	1.615412005	1.605231866	1.595166608
3	2.283225117	2.264425978	2.245889540	2.227610822
4	2.854978362	2.826342838	2.798180638	2.770481392
5	3.352155098	3.312850942	3.274293653	3.236464714
6	3.784482693	3.734070080	3.684735908	3.636450399
7	4.160419733	4.098761974	4.038565438	3.979785750
8	4.487321507	4.414512531	4.343590895	4.274494206
9	4.771583919	4.687889637	4.606543875	4.527462837
10	5.018768625	4.924579772	4.833227478	4.744603294
11	5.233711848	5.129506296	5.028644378	4.930989952
12	5.420618998	5.306931858	5.197107222	5.090978499
13	5.583146955	5.460547063	5.342333812	5.228307725
14	5.724475613	5.593547241	5.467529148	5.346186888
15	5.847370098	5.708698910	5.575456162	5.447370719
16	5.954234868	5.808397325	5.668496691	5.534223793
17	6.047160755	5.894716298	5.748704044	5.608775788
18	6.127965874	5.969451340	5.817848314	5.672768917
19	6.198231194	6.034157005	5.877455443	5.727698641
20	6.259331473	6.090179225	5.928840899	5.774848619
21	6.312462151	6.138683311	5.973138706	5.815320703
22	6.358662740	6.180678192	6.011326471	5.850060689
23	6.398837165	6.217037395	6.044246957	5.879880420
24	6.433771448	6.248517225	6.072626687	5.905476755
25	6.464149085	6.275772489	6.097091972	5.927447858
26	6.490564422	6.299370121	6.118182734	5.946307174
27	6.513534280	6.319800970	6.136364426	5.962495429
28	6.533508069	6.337490017	6.152038298	5.976390926
29	6.550876582	6.352805210	6.165550257	5.988318391
30	6.565979636	6.366065117	6.177198497	5.998556559
31	6.579112727	6.377545555	6.187240084	6.007344686
32	6.590532806	6.387485329	6.195896624	6.014888142
33	6.600463310	6.396091194	6.203359159	6.021363212
34	6.609098530	6.403542159	6.209792378	6.026921212
35	6.616607417	6.409993212	6.215338257	6.031692027
36	6.623136885	6.415578538	6.220119187	6.035787148
37	6.628814682	6.420414319	6.224240678	6.039302273
38	6.633751897	6.424601142	6.227793688	6.042319547
39	6.638045128	6.428226097	6.230856628	6.044909483
40	6.641778372	6.431364586	6.233497093	6.047132603
41	6.645024671	6.434081892	6.235773356	6.049040861
42	6.647847540	6.436434539	6.237735651	6.050678851
43	6.650302209	6.438471462	6.239427286	6.052084850
44	6.652436703	6.440235032	6.240885591	6.053291717
45	6.654292785	6.441761932	6.242142751	6.054327654
46	6.655906770	6.443083924	6.243226509	6.055216870
47	6.657310235	6.444228506	6.244160784	6.055980146
48	6.658530639	6.445219485	6.244966193	6.056635318
49	6.659591860	6.446077476	6.245660511	6.057197698
50	6.660514661	6.446820326	6.246259061	6.057680428
60	6.665145984	6.450478547	6.249151990	6.059970787
70	6.666290777	6.451344412	6.249807770	6.060468117
80	6.666573752	6.451549354	6.249956424	6.060576107
90	6.666643699	6.451597861	6.249990122	6.060599556
100	6.666660989	6.451609343	6.249997760	6.060604648

Таблица 6. Коэффициенты для расчета ежемесячных платежей по ссуде

Число лет	Ставка процентов 5.00	5.50	6.00	6.50
1	0.085607481	0.085836784	0.086066429	0.086296416
2	0.043871389	0.044095656	0.044320610	0.044546251
3	0.029970897	0.030195901	0.030421937	0.030649002
4	0.023029293	0.023256475	0.023485029	0.023714952
5	0.018871233	0.019101162	0.019332801	0.019566148
6	0.016104932	0.016337887	0.016572887	0.016809929
7	0.014133909	0.014370042	0.014608554	0.014849436
8	0.012659920	0.012899322	0.013141430	0.013386232
9	0.011517273	0.011759997	0.012005749	0.012254515
10	0.010606551	0.010852627	0.011102050	0.011354797
11	0.009864488	0.010113932	0.010367034	0.010623767
12	0.009248904	0.009501721	0.009758502	0.010019210
13	0.008730597	0.008986785	0.009247234	0.009511901
14	0.008288707	0.008548257	0.008812359	0.009080960
15	0.007907936	0.008170834	0.008438568	0.008711073
16	0.007576809	0.007843039	0.008114378	0.008390752
17	0.007286552	0.007556091	0.007831007	0.008111211
18	0.007030338	0.007303163	0.007581623	0.007865612
19	0.006802777	0.007078862	0.007360829	0.007648559
20	0.006599557	0.006878873	0.007164310	0.007455731
21	0.006417186	0.006699702	0.006988569	0.007283629
22	0.006252807	0.006538491	0.006830744	0.007129389
23	0.006104059	0.006392876	0.006688472	0.006990646
24	0.005968975	0.006260889	0.006559780	0.006865426
25	0.005845900	0.006140874	0.006443014	0.006752071
30	0.005368216	0.005677890	0.005995505	0.006320680
	7.00	**7.50**	**8.00**	**8.50**
1	0.086526746	0.086757416	0.086988429	0.087219782
2	0.044772579	0.044999592	0.045227291	0.045455674
3	0.030877096	0.031106218	0.031336365	0.031567537
4	0.023946244	0.024178901	0.024412922	0.024648303
5	0.019801198	0.020037948	0.020276394	0.020516531
6	0.017049006	0.017290112	0.017533240	0.017778384
7	0.015092679	0.015338275	0.015586214	0.015836485
8	0.013633717	0.013883870	0.014136679	0.014392128
9	0.012506276	0.012761016	0.013018714	0.013279352
10	0.011610847	0.011870176	0.012132759	0.012398568
11	0.010884100	0.011148005	0.011415446	0.011686391
12	0.010283810	0.010552263	0.010824525	0.011100555
13	0.009780741	0.010053704	0.010330738	0.010611791
14	0.009354005	0.009631433	0.009913181	0.010199185
15	0.008988282	0.009270123	0.009556520	0.009847395
16	0.008672080	0.008958275	0.009249250	0.009544910
17	0.008396606	0.008687093	0.008982568	0.009282921
18	0.008155021	0.008449733	0.008749626	0.009054574
19	0.007941923	0.008240788	0.008545013	0.008854456
20	0.007752989	0.008055931	0.008364400	0.008678232
21	0.007584717	0.007891660	0.008204279	0.008522392
22	0.007434241	0.007745104	0.008061779	0.008384061
23	0.007299192	0.007613892	0.007934525	0.008260865
24	0.007177595	0.007496049	0.007820541	0.008150823
25	0.007067791	0.007389911	0.007718162	0.008052270
30	0.006653024	0.006992145	0.007337645	0.007689134

Коэффициенты для расчета ежемесячных платежей по ссуде

Число лет	Ставка процентов			
	9.00	9.50	10.00	11.50
1	0.087451476	0.087683511	0.087915887	0.088148602
2	0.045684742	0.045914492	0.046144926	0.046376041
3	0.031799732	0.032032949	0.032267187	0.032502443
4	0.024885042	0.025123136	0.025362583	0.025603379
5	0.020758355	0.021001861	0.021247044	0.021493900
6	0.018025537	0.018274690	0.018525837	0.018778969
7	0.016089078	0.016343981	0.016601184	0.016860673
8	0.014650203	0.014910887	0.015174164	0.015440016
9	0.013542908	0.013809360	0.014078686	0.014350861
10	0.012667577	0.012939755	0.013215073	0.013493499
11	0.011960803	0.012238645	0.012519877	0.012804459
12	0.011380306	0.011663732	0.011950782	0.012241406
13	0.010896805	0.011185721	0.011478480	0.011775019
14	0.010489375	0.010783680	0.011082026	0.011384340
15	0.010142665	0.010442246	0.010746051	0.011053989
16	0.009845158	0.010149895	0.010459019	0.010772424
17	0.009588039	0.009897806	0.010212104	0.010530812
18	0.009364448	0.009679114	0.009998436	0.010322277
19	0.009168967	0.009488396	0.009812589	0.010141388
20	0.008997259	0.009321311	0.009650216	0.009983798
21	0.008845810	0.009174343	0.009507800	0.009845986
22	0.008711743	0.009044613	0.009382459	0.009725070
23	0.008592681	0.008929742	0.009271816	0.009618672
24	0.008486643	0.008827748	0.009173887	0.009524808
25	0.008391963	0.008736966	0.009087007	0.009441817
30	0.008046226	0.008408542	0.008775715	0.009147392
	11.0	11.5	12.0	12.5
1	0.088381658	0.088615053	0.088848788	0.089082862
2	0.046607838	0.046840315	0.047073472	0.047307308
3	0.032738717	0.032976006	0.033214309	0.033453625
4	0.025845522	0.026089008	0.026333835	0.026579998
5	0.021742423	0.021992607	0.022244447	0.022497938
6	0.019034079	0.019291156	0.019550192	0.019811178
7	0.017122436	0.017386460	0.017652732	0.017921238
8	0.015708425	0.015979373	0.016252841	0.016528808
9	0.014625861	0.014903660	0.015184232	0.015467551
10	0.013775001	0.014059544	0.014347094	0.014637616
11	0.013092349	0.013383503	0.013677878	0.013975429
12	0.012535552	0.012833165	0.013134191	0.013438572
13	0.012075273	0.012379176	0.012686662	0.012997660
14	0.011690542	0.012000554	0.012314295	0.012631683
15	0.011365969	0.011681898	0.012001680	0.012325220
16	0.011090003	0.011411649	0.011737251	0.012066698
17	0.010853806	0.011180962	0.011512155	0.011847258
18	0.010650496	0.010982952	0.011319503	0.011660008
19	0.010474638	0.010812180	0.011153856	0.011499508
20	0.010321883	0.010664296	0.011010861	0.011361405
21	0.010188709	0.010535776	0.010886996	0.011242180
22	0.010072234	0.010423741	0.010779383	0.011138957
23	0.009970080	0.010325813	0.010685648	0.011049368
24	0.009880265	0.010240015	0.010603818	0.010971444
25	0.009801130	0.010164689	0.010532241	0.010903541
30	0.009523233	0.009902914	0.010286125	0.010672577

Коэффициенты для расчета ежемесячных платежей по ссуде

Число лет	Ставка процентов			
	13.00	13.50	14.00	14.50
1	0.089317275	0.089552027	0.089787117	0.090022546
2	0.047541822	0.047777014	0.048012883	0.048249428
3	0.033693952	0.033935287	0.034177629	0.034420977
4	0.026827495	0.027076322	0.027326476	0.027577952
5	0.022753073	0.023009846	0.023268250	0.023528281
6	0.020074105	0.020338962	0.020605739	0.020874426
7	0.018191963	0.018464892	0.018740011	0.019017304
8	0.016807255	0.017088159	0.017371501	0.017657257
9	0.015753587	0.016042314	0.016333701	0.016627719
10	0.014931074	0.015227428	0.015526643	0.015828678
11	0.014276107	0.014579868	0.014886661	0.015196438
12	0.013746252	0.014057171	0.014371270	0.014688489
13	0.013312102	0.013629916	0.013951032	0.014275375
14	0.012952635	0.013277068	0.013604896	0.013936034
15	0.012652421	0.012983185	0.013317413	0.013655008
16	0.012399878	0.012736680	0.013076991	0.013420700
17	0.012186144	0.012528687	0.012874762	0.013224242
18	0.012004325	0.012352312	0.012703830	0.013058741
19	0.011848979	0.012202114	0.012558759	0.012918764
20	0.011715757	0.012073746	0.012435208	0.012799977
21	0.011601141	0.011963698	0.012329671	0.012698885
22	0.011502263	0.011869105	0.012239293	0.012612643
23	0.011416759	0.011787613	0.012161731	0.012538917
24	0.011342668	0.011717270	0.012095042	0.012475780
25	0.011278353	0.011656448	0.012037610	0.012421629
30	0.011061995	0.011454121	0.011848717	0.012245559
	15.0	15.5	16.0	16.5
1	0.090258312	0.090494416	0.090730857	0.090967636
2	0.048486648	0.048724542	0.048963110	0.049202351
3	0.034665328	0.034910681	0.035157033	0.035404382
4	0.027830748	0.028084858	0.028340280	0.028597009
5	0.023789930	0.024053191	0.024318057	0.024584521
6	0.021145013	0.021417488	0.021691840	0.021968058
7	0.019296754	0.019578346	0.019862063	0.020147889
8	0.017945405	0.018235922	0.018528785	0.018823971
9	0.016924337	0.017223525	0.017525250	0.017829482
10	0.016133495	0.016441053	0.016751312	0.017064229
11	0.015509149	0.015824744	0.016143172	0.016464381
12	0.015008767	0.015332042	0.015658252	0.015987336
13	0.014602874	0.014933455	0.015267044	0.015603568
14	0.014270397	0.014607899	0.014948454	0.015291977
15	0.013995871	0.014339903	0.014687007	0.015037086
16	0.013767696	0.014117866	0.014471103	0.014827297
17	0.013577004	0.013932924	0.014291882	0.014653757
18	0.013416907	0.013778194	0.014142470	0.014509605
19	0.013281979	0.013648260	0.014017463	0.014389449
20	0.013167895	0.013538806	0.013912559	0.014289006
21	0.013071171	0.013446364	0.013824305	0.014204839
22	0.012988974	0.013368115	0.013749900	0.014134168
23	0.012918986	0.013301757	0.013687059	0.014074728
24	0.012859292	0.013245392	0.013633906	0.014024664
25	0.012808306	0.013197452	0.013588888	0.013982446
30	0.012644440	0.013045169	0.013447569	0.013851480

СОДЕРЖАНИЕ

Е. М. Четыркин

МЕТОДЫ ФИНАНСОВЫХ И КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Оригинал-макет подготовлен *С. Яковлевым*

Подписано в печать 30.06.92.
Формат 60x88/16. Бум. офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. п. л. 20,00. Уч.-изд. л. 22,04.
Тираж 20000 экз. Заказ 354.

Издательство «Дело»,
117571, Москва, пр. Вернадского, 82

Агентство «BusinessРечь»,
121352, Москва, а/я № 13.

Отпечатано в Московской типографии № 8 Мининформпечати РФ.
101898, Москва, Хохловский пер., 7.